ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

Sobre la capturabilidad de teorías informales en sistemas axiomáticos formales*

Ariel Roffé
Universidad de Buenos Aires

Introducción

El objetivo de este artículo es analizar qué quiere decir capturar una teoría (se utilizará la aritmética como ejemplo paradigmático) por medio de un sistema axiomático formal. Se considerarán para ello dos enfoques, que pueden denominarse "semántico" y "sintáctico", tanto en términos de sus ventajas como de sus limitaciones. El enfoque semántico (presupuesto por Barrio y Da Ré en este volumen y expuesto en la primera sección), entiende la expresabilidad como una restricción de la clase de los modelos; se muestra que esta concepción lleva a tres clases distintas de limitaciones expresivas. En la segunda sección se examinan -y finalmente rechazan- algunos posibles caminos de solución a estos problemas. En la última sección se ofrecen objeciones a las alternativas restantes y en base a ellas se elabora el enfoque sintáctico que liga la noción de captura a la de prueba de las oraciones relevantes. También se argumenta que desde este marco pueden evitarse algunas de las limitaciones del enfoque semántico.

1. Capturabilidad semántica

La temática de este artículo, así como la de los dos que lo preceden (Barrio y Da Ré, ambos en este volumen), es la noción de "capturabilidad". Más específicamente, la pregunta a la que se intenta dar respuesta es bajo qué condiciones puede decirse que una teoría formal (sea un conjunto de oraciones formales cerrado bajo consecuencia lógica o una clase de modelos) "captura" una cierta teoría informal o práctica preteórica. Para responder a esta pregunta es necesario comenzar diciendo algo acerca de qué estamos entendiendo por "capturar" o cuál es la noción preteórica que estamos intentando elucidar. En general, la práctica matemática (como lo evidencia la historia de las matemáticas) comienza por teorías formuladas en lenguajes no formalizados. Ejemplos de ello son la aritmética (utilizada, en adelante, como ejemplo paradigmático en el presente artículo), la teoría de conjuntos, la geometría, la teoría de la probabilidad, etc. Por diferentes motivos, algunos de los cuales se repasarán en la sección 3, estas teorías informales son reemplazadas por teorías formales, que supone que "corresponden" a ellas de algún modo. Si ese reemplazo o esa correspondencia es

* Este trabajo fue posible gracias a la Beca Estímulo UBACyT otorgada según Res. (CS) Nº 1041/14.

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

adecuada, en un sentido a precisar, puede decirse que las oraciones de estas teorías formales, que contienen términos sin interpretar, "expresan" proposiciones de la teoría informal. De ese modo pueden vincularse las nociones de "capturabilidad" y de "expresividad". Las oraciones de una teoría formal son expresivamente adecuadas, o logran expresar aquello que se pretende que expresen, si la teoría misma logra capturar a la práctica informal que se propone reemplazar. Nótese que, en casos como la aritmética, existen —como veremos— distintos candidatos a ocupar el rol de "teoría formal de la aritmética". A algunos de ellos se les objeta no llegar a capturar lo suficiente la teoría o práctica informal, mientras que a otros el incluir cosas de más respecto de lo que se desea capturar. En lo que resta de esta sección se examina el modo usual de elucidar la noción de capturabilidad (al cual denominaré "enfoque semántico", por su uso de la teoría de modelos), para luego presentar algunas críticas, junto con un enfoque superador.

El enfoque semántico responde a preguntas como qué es expresar, o cuándo una fórmula F de un lenguaje formal expresa una determinada proposición P, mediante la tesis básica de que *expresar es restringir interpretaciones*. Es decir, F expresa P si y solo si sus modelos son *sólo* y *todos* aquellos en los que P es verdadera. Por ejemplo, la oración $\exists y\ \exists x\ x \neq y$ expresa satisfactoriamente la proposición "hay al menos dos cosas", dado que todas las interpretaciones que la hacen verdadera tienen al menos dos objetos en el dominio y, conversamente, todas las interpretaciones que tienen al menos dos objetos el dominio la hacen verdadera. Del mismo modo, supóngase que se tiene una teoría axiomática T (se entenderá aquí por "teoría" a un conjunto de oraciones cerrado bajo consecuencia lógica) con los axiomas $A_1, A_2, \ldots A_n$.[1] Si se agrega un axioma A_{n+1} independiente, obteniéndose una teoría T', entonces T' probará más cosas que T, pero solo una subclase de los modelos de T satisfarán los nuevos teoremas de T'. En el ejemplo anterior agréguese a nuestra oración original la oración $\neg\exists x\ \exists y\ \exists z\ (x \neq y\ \&\ x \neq z\ \&\ y \neq z)$ —la cual expresa que "hay como máximo dos cosas"— y ciérrese bajo consecuencia lógica. Todos los modelos del conjunto ampliado de oraciones son modelos de la oración original, pero no viceversa. En consecuencia, la clase de los modelos de T' será un subconjunto propio de la de T, mientras que la relación entre los conjuntos de teoremas será la inversa. En resumen, la relación entre teoremas y modelos es inversamente proporcional; agregar teoremas es "decir más cosas" o poner mayores requisitos para que algo sea un modelo, lo cual implica reducir las interpretaciones que los satisfacen[2].

En relación con una teoría formal como PA es posible preguntarse cosas como las siguientes: ¿Por qué pensar que PA captura a la aritmética?. Es decir, ¿por qué pensar que las oraciones de PA hablan acerca de números y de sumas, multiplicaciones, etc. entre ellos? Por ejemplo, ¿qué motivos hay para pensar que la fórmula"1+1=2" expresa que dos más dos es igual a cuatro? (que "+" refiere a la suma, "1" al número uno, etc.)[3]. De acuerdo con lo dicho anteriormente, para sostener que esto ocurre necesitaríamos que las interpretaciones que satisfagan los axiomas de PA (sus modelos) sean *sólo* y *todas* aquellas en las que $|M| = \mathbb{N}$, I("+") = + (la verdadera función suma), I("0") = 0 (el verdadero número cero), etc. Llámese a este modelo N, o "*modelo pretendido*" de PA. La cuestión es si PA logra individuar (restringir la clase de sus modelos) a este único modelo.

Como es bien sabido, esto no ocurre. Y no ocurre por tres motivos distintos, que pueden verse (bajo esta caracterización de la expresividad) como distintas clases de limitaciones expresivas o semánticas. En primer lugar, PA tiene modelos isomórficos con el modelo pretendido. Dado un modelo M para una teoría T, con un dominio D, siempre es posible generar otro modelo M' isomórfico a M, que desacuerda con M respecto de la ontología del dominio de discurso[4] y/o respecto de la interpretación de los demás predicados y funciones[5]. Sin embargo, al M' ser isomórfico a M, hará

1. El ejemplo considera, por simplicidad, una teoría que contiene una cantidad finita de axiomas. Sin embargo, como es el caso con la aritmética, dicho conjunto podría ser infinito, en tanto sea recursivo.

2. En primer orden, si bien agregar *axiomas* no implica necesariamente modificar la clase de los modelos (ya que estos pueden no ser independientes), agregar *teoremas* sí lo hace. En el caso de teoremas adicionales que sólo involucran un lenguaje ampliado, la clase de los modelos también se modifica. Lo que no ocurre —a diferencia de la adición de teoremas formulados en el mismo lenguaje— es que esa clase se restrinja. Nótese además que la idea es que, si se llama T1 a la teoría y T2 a la teoría ampliada, T1 T2. Esto no involucra que haya "más" teoremas en T2 que en T1, puesto que ambas contienen infinitos.

3. Nótese que oraciones como "1+1 = 2", o "suc(0) + suc(0) = suc(suc(0))" para usar solo términos primitivos, son oraciones formales, que contienen términos sin interpretar. "1+1 = 2" puede ser simbolizada como "=[f1(f1(a)), f2[f1(a), f1(a)]]", donde "f1", "f2", son símbolos de función (uno unario, el otro binario), y "a" es una constante de individuo. Usualmente se los representa con los símbolos "suc", "+" y "0" porque su *interpretación pretendida* es la función sucesor, la función suma y el número 0. Pero la interpretación pretendida no es parte de PA en tanto conjunto de oraciones.

4. Respecto de cómo generar tal M', considérese lo siguiente: sean m y m' dos objetos tales que $m \in |M|$ y $m' \notin |M|$. M' consiste simplemente en el modelo que tiene a m' en lugar de m, y que interpreta a toda relación R de manera tal que $R^{M}(m) \Leftrightarrow R^{M'}(m')$. Para funciones el requisito es similar.

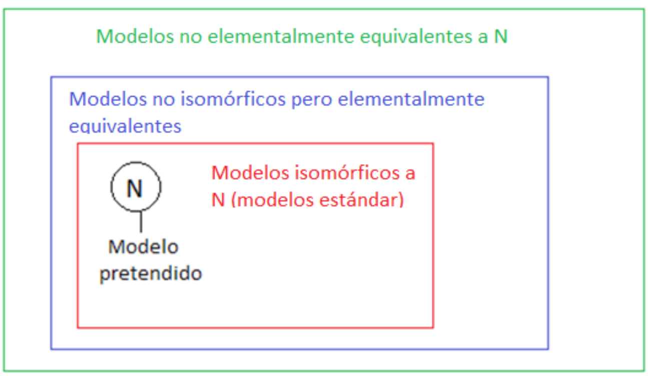
5. Tómese como ejemplo el siguiente modelo: M1 = < N, I1> tal que I1 es como sigue: I1("0") = 1; I1("s") = {<1,0>; <0,2>, <2, 3>,etc. (siguen las usuales)}; I1("+") = {<<1,0>, 0>; <<1,1>,1>; <<1,2>, 2>; <<0,2>,3>; etc.}, lo cual es idéntico a {<< I1("0"), I1("1")>, I1("1")>; << I1("0"), I1("0")>, I1("0")>; << I1("0"), I1("2")>, I1("2")>; << I1("1"), I1("2")>, I1("3")>}; etc. Lo que hace este modelo es "cambiar de lugar" al 0 y al 1. Tiene como dominio a N con lo cual diríamos que habla acerca de números naturales, sin embargo cuando dice cosas como que "1+1=2" no está hablando acerca de sumas entre números naturales sino de alguna otra cosa (el símbolo "+" no coincide con la función suma real).

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

verdaderas a las mismas oraciones, y será entonces también un modelo de T. Es decir, esta versión del argumento se centra en la idea de que *fijar los valores de verdad para oraciones no es suficiente para fijar la referencia de los términos que aparecen en dichas oraciones*. Así, no es posible restringir los modelos a un único modelo pretendido, sino que a lo máximo a lo que se podría (idealmente) aspirar, es a restringirlos a una única *clase de isomorfismo*[6].

La segunda versión del argumento implica que las teorías formales no están en condiciones de llegar a este ideal, no pueden restringir sus modelos a una única clase de isomorfismo. Para llegar a ello se utiliza el teorema Löwenheim-Skolem (L-S en adelante), el cual —en sus distintas versiones— implica que si una teoría tiene modelos infinitos, entonces tiene modelos de todas las cardinalidades infinitas (y por lo tanto no isomórficos entre sí). Puede resumirse la idea tras esta segunda formulación diciendo que *fijar el valor de verdad para las oraciones no logra fijar la estructura del modelo*[7].

Por último, una tercera versión, aun más fuerte, se basa en los resultados de Gödel para mostrar que las teorías de primer orden ni siquiera logran hacer lo primero, fijar el valor de verdad de las oraciones del lenguaje. Puesto que toda teoría axiomática lo suficientemente expresiva tiene oraciones indecidibles (oraciones A, tales que T no demuestra ni A ni ¬A), existirán modelos que hagan verdadera a A, y otros que hagan verdadera a ¬A. Es decir, la teoría tiene modelos que hacen verdaderos a distintos conjuntos de oraciones (también llamados "modelos no elementalmente equivalentes"). La tercera versión implica entonces que *ninguna teoría axiomatizada de primer orden (lo suficientemente expresiva) logra restringir sus modelos a una única clase de equivalencia elemental*.



Cada una de las versiones es más fuerte que la anterior e implica problemas más serios para una teoría como PA. La primera versión es generalmente aceptada como irresoluble (o bien como irrelevante, si se adoptan supuestos estructuralistas, en cuyo caso el modelo pretendido es la clase de los modelos estándar), y lo que se busca, por lo general, es identificar a esto último. Nótese además que la tercera versión implica a la segunda, ya que si una teoría tiene modelos no elementalmente equivalentes, entonces estos deben ser también no isomórficos entre sí[8]. En consecuencia, me centraré mayormente en el tercer grado, ya que, si no puede solucionárselo tampoco podrán solucionarse los otros dos.

2. Soluciones posibles al tercer grado de indeterminación semántica

Lo primero que puede notarse es que, al menos a primera vista, ninguno de los grados de indeterminación puede ser solucionado agregando axiomas formulados en primer orden a la teoría en cuestión. Sea A ese axioma adicional, basta con aplicar nuevamente

6. Cabe notar que ciertos tipos de estructuralismo matemático podrían dar una respuesta a este punto: la aritmética no pretende hablar acerca de cierto dominio de objetos en particular, sino acerca de una "estructura" que puede ser instanciada por distintos conjuntos de objetos —sean estos objetos abstractos como conjuntos, objetos concretos, etc.---. Por tanto, todos los modelos isomórficos a los que el realista llama "el modelo pretendido" son también modelos pretendidos para el estructuralista. Así, si PA lograra restringir sus modelos a una única clase de isomorfismo, "+" hablaría de la suma, ya que la suma es meramente una función que relaciona lugares en la estructura con otros lugares en la estructura. Esta respuesta cae con la siguiente versión.

7. La noción de estructura puede aclararse atendiendo a que dos modelos isomórficos difieren sólo en la "naturaleza" de los elementos de sus dominios, pero sin embargo, estos *entran en las mismas relaciones mutuas entre sí* —a esto me refiero con que tienen la misma "estructura"—. Eso es precisamente lo que no ocurre cuando los modelos son no-isomórficos entre sí.

8. Dado que si dos modelos son isomórficos entonces hacen verdaderas a las mismas oraciones (son elementalmente equivalentes). La conversa no vale. Los modelos de una teoría podrían ser no isomórficos y elementalmente equivalentes a la vez. Piénsese por ejemplo lo que ocurriría si se le aplica el teorema L-S a la Aritmética verdadera.

los teoremas de L-S y Gödel a T' (la clausura lógica de T ∪ {A}) para volver a generar ambos casos interesantes. Es decir, agregar axiomas independientes adicionales logra reducir la clase de los modelos de T, sin embargo no logra nunca reducirlos en un grado tal que todos sus modelos sean elementalmente equivalentes y/o isomórficos.

Es necesario hacer algunas aclaraciones alrededor de esto. En primer lugar, lo que no puede hacerse es agregar *recursivamente* axiomas. La indeterminación en los valores de verdad puede ser solucionada en primer orden si la teoría aritmética que se adopta no es recursivamente axiomatizable. Sea la Aritmética verdadera (TA en adelante) el conjunto de las oraciones verdaderas en el modelo estándar de PA —es decir, {A / N $\vDash_{PA}$ A}, puesto que toda oración es o bien verdadera o bien falsa (y por lo tanto su negación verdadera) en los modelos de PA (y en particular en el modelo pretendido N), TA será completa respecto de la negación. Por tanto, no tiene oraciones indecidibles y no se le aplican los teoremas de Gödel (aunque sí el teorema L-S, generando el segundo grado). Una primera solución al tercer grado de indeterminación podría consistir entonces en adoptar TA.

Puede además pensarse a TA es como una sola de las infinitas posibles extensiones de PA que son completas respecto de la negación (es decir como una de infinitas posibles soluciones al tercer grado de indeterminación). Pártase de PA y para toda oración indecidible A agréguese como axioma o bien a A, o bien a ¬A (de manera consistente), obteniéndose así teorías "maximales", que solucionan el tercer grado de indeterminación. Putnam (1980) nota como problema con ese procedimiento la *arbitrariedad*. La verdad de una oración no se puede simplemente decidir convencionalmente[9]. Una pregunta relevante que parece estar rondando —y a la que retornaremos luego— es la cuestión de qué consideramos que es la aritmética. Lo que Putnam parece estar diciendo es que una teoría que decidiera arbitrariamente por sí o por no frente a toda oración indecidible no sería una teoría aritmética (exceptuando quizás el caso de TA). Por tanto, de todas estas extensiones no recursivamente axiomatizables de PA, que solucionan el tercer grado de indeterminación, la única que podría en principio ser aceptable es TA.

9. En su artículo, Putnam está preocupado más por ZFC que por PA. En ese caso la objeción tiene aún más sentido. En el caso de PA tenemos oraciones como G y Con que son indecidibles, pero que tenemos fuertes motivos para creer que son verdaderas. En el caso de la teoría de conjuntos hay oraciones indecidibles interesantes para las que esto no ocurre.

Una segunda aclaración necesaria es la siguiente. Si bien no pueden agregarse axiomas en primer orden *formulados en el mismo lenguaje de T* para solucionar el problema, no es tan obvio que esto no pueda lograrse esto en un lenguaje extendido. Por ejemplo, agréguese al lenguaje de PA un predicado veritativo, y agréguense axiomas formulados en el lenguaje extendido (tómese por caso la teoría tarskiana de la verdad T(PA)[10]). T(PA) no es conservativa sobre PA —de hecho prueba las oraciones de Gödel y Consistencia de PA—, mientras que sus propias oraciones G y Con no están formuladas en el lenguaje de PA. Es decir, pueden obviamente aplicársele los teoremas de Gödel a T(PA), pero no es obvio que T(PA) tenga oraciones indecidibles *formuladas exclusivamente en el lenguaje de PA*. De esta manera, si T(PA) decidiera sobre todas las oraciones indecidibles de PA podría argumentarse que la adopción de esta teoría soluciona más adecuadamente el problema de la indeterminación que las propuestas anteriores, dado que:

10. Para más sobre la relevancia de T(PA) en estas problemáticas véase la nota 14.

1. T(PA) es recursivamente axiomatizable (soluciona el problema con TA).

2. Los axiomas de T(PA) no parecen ser arbitrarios sino que parecen exigencias razonables para un predicado veritativo (es decir, los motivos para la adopción de los axiomas de T(PA) son independientes de la cuestión de la indeterminación semántica).

3. T(PA) decide "bien" sobre todas las oraciones indecidibles de la aritmética; es decir, los modelos de T(PA) serían elementalmente equivalentes a los modelos de TA (cuando se les "recorta" el predicado veritativo, obviamente).

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

> 4. El hecho de que T(PA) tenga sus propias oraciones indecidibles no constituiría un problema dado que lo que estaríamos haciendo sería agregar requisitos adicionales para limitar las interpretaciones adecuadas *de los términos de PA*. En lo que estamos interesados es en la determinación semántica o no de PA, no de T(PA). Para decirlo de otra manera, lo que el caso de T(PA) mostraría es que pueden agregarse requisitos (o lenguaje, como el predicado Tr) que son ellos mismos semánticamente indeterminados (en el tercer sentido) para determinar la semántica de otro lenguaje, o de otra porción del lenguaje.

Desafortunadamente, la premisa 3 del argumento es falsa como se muestra a continuación[11]:

> (1) T(PA) es correcta con respecto a PA, esto es, si T(PA) prueba una oración *A* que no contiene al predicado Tr, *A* es verdadera en *N*.
>
> (2) T(PA) es recursivamente axiomatizable, con lo cual el conjunto de sus teoremas es recursivamente enumerable (R.E.).
>
> (3) El conjunto de oraciones del lenguaje de PA es recursivo.
>
> (4) El conjunto de oraciones verdaderas en *N* no es ni recursivo ni R.E., motivo por el cual no es recursivamente axiomatizable (en el lenguaje de PA).

Sea *S* el conjunto de teoremas de T(PA), que por (2) es R.E. Por (3), el conjunto *R* que resulta de intersecar *S* con el conjunto de oraciones del lenguaje de PA es también R.E. Si T(PA) probara todas las oraciones verdaderas en *N* (que por supuesto no contienen al predicado Tr), por (1), *R* sería el conjunto de oraciones verdaderas en *N*. Pero esto no puede ser, porque *R* es R.E. y, por (4), sabemos que el conjunto de oraciones verdaderas en *N* no lo es.

La prueba muestra además un resultado general interesante, que el conjunto de los teoremas de TA no es capturable por ninguna teoría recursivamente axiomatizable, *tenga o no lenguaje "de más"* (y por supuesto, el resultado es aun más general, no vale solo para la aritmética sino para cualquier teoría lo suficientemente rica interpretada con una semántica de primer orden, y la clase de equivalencia elemental de su modelo pretendido).

Todos los intentos anteriores exploran la posibilidad de adicionar *oraciones formales interpretadas bajo una semántica de primer orden* para solucionar los problemas de intedeterminación. Examinemos a continuación qué ocurre si hacemos a un lado este requisito.

En primer lugar, podríamos abandonar la parte que exige mantenerse en un lenguaje formal, simplemente agregando requisitos adicionales formulados en lenguaje natural, quizás aumentado con ciertos símbolos matemáticos ya interpretados de manera pretendida; llámese a esto "lenguaje matemático *naïve*". Así, podríamos por ejemplo agregar como requisito para ser estándar el "ser contable" o "ser parte de lo que la comunidad científica pretende capturar" (para una estrategia similar en el marco de teorías empíricas véase Moulines, 2002). Putnam tiene un famoso argumento en contra de este tipo de soluciones, comúnmente denominado el argumento de "sólo más teoría" (véase por ejemplo Putnam, 1980, p. 36-38). Éste consiste en sostener que hacer eso es caer en petición de principio, ya que es asumir que el lenguaje matemático *naïve* (o el lenguaje natural) es semánticamente determinado —por ejemplo, que la oración en español "ser contable" es verdadera de y solo de los modelos que son contables—. Pero, según Putnam, eso es justamente lo que está en cuestión y no puede darse por asumido. Nada nos asegura que no pueda aplicársele el teorema L-S o Gödel al lenguaje natural.

11. Agradezco a Lavinia Picollo por sugerirme esta prueba.

A modo de ejemplo, en este volumen Da Ré sostiene respecto de la solución de Benacerraf de apelar a la relación de orden de los modelos: "Si bien esta estrategia dejaría de lado a los modelos no isomórficos al modelo estándar, el concepto de ω-secuencia está definido en teoría de conjuntos. Esto es problemático ya que también hay modelos no estándar en teoría de conjuntos, por lo que al desplazar a los modelos no estándar de la aritmética, estamos corriendo la discusión hacia los fundamentos de teoría de conjuntos". Putnam le aplicaría este mismo argumento a su solución (que consiste en apelar a la recursividad de ciertas funciones), le diría que está corriendo la discusión hacia la cuestión de la determinación semántica del lenguaje que habla sobre funciones recursivas. La única diferencia entre las soluciones de Benacerraf y Da Ré consiste en que una utiliza conceptos que han sido definidos en una teoría formal mientras que la otra se mantiene en el lenguaje natural. Pero este sólo hecho no puede bastar para que una solución sea adecuada mientras que la otra no lo sea.

Por otro lado, el lenguaje *naïve* parece conducirnos a paradojas y otros absurdos (basta con recordar casos como las paradojas de Russell, véase Castro Albano, 2014). Con lo cual Putnam adopta como requisito para que un requisito adicional sea aceptable el tener que estar formulado en un lenguaje formalizado. Y si estos deben ser agregados como axiomas *e interpretados por medio de una semántica de primer orden*, entonces, como se mostró anteriormente, son simplemente "más teoría" a la cual aplicar los teoremas mencionados[12].

12. Para algunas posibles respuestas y contra-respuestas a este argumento puede verse Roffé (2014) y Bays (2000).

Otra solución alternativa es la adoptada, entre otros, por Barrio en este volumen y consiste en la adopción de semánticas de segundo orden para interpretar a las oraciones formales de la teoría. Estas semánticas tienen la ventaja de no validar teoremas como L-S, y hacen que la clase de modelos de ciertos sistemas aritméticos (como la extensión de PA denominada Z_2,véase el artículo de Barrio para una introducción a esta teoría) quede reducida a única clase de isomorfismo. Es decir, adoptar este tipo de semánticas hace algo aun más fuerte que adoptar TA, ya que soluciona también el segundo grado de indeterminación. Si bien esto parecería satisfacer todos los requisitos que impone el criterio de capturabilidad semántico, adoptar este tipo de semánticas trae aparejado otro tipo de problemas, como por ejemplo la incompletitud. Si bien los teoremas de Gödel valen y Z_2 no es capaz de probar ni A ni ¬A para algunas oraciones A, esas oraciones son o bien verdaderas en *todos* los modelos de la teoría o bien falsas en todos. Es decir, las teorías (entendidas aquí como conjuntos de oraciones cerradas bajo consecuencia lógica) no son capaces de probar las oraciones que son verdaderas en todos sus modelos (o de probar las negaciones de todas las que son falsas en todos ellos). Por lo tanto, incluso aunque se logre fijar una única clase de isomorfismo, resulta imposible *saber* cuál es esa clase. En la siguiente sección argumentaré que este tipo de problemas implican la necesidad de cambiar la noción de capturabilidad.

3. Capturabilidad sintáctica

A modo de resumen de la sección anterior, (y si se aceptan los argumentos de Putnam) quedan en pie básicamente dos posibles soluciones al problema de la indeterminación en los valores de verdad (el tercer grado). La primera es adoptar teorías no recursivamente axiomatizables como TA, mientras que la segunda es adoptar semánticas de segundo orden. En esta sección comienzo argumentando que ambas soluciones tienen el mismo problema, a saber, que si bien ambas permiten restringir la clase de los modelos de PA a una única clase de equivalencia elemental, ninguna de ellas nos permite a nosotros *saber* cuál es esa clase (lo cual era el problema que nos ocupaba en principio), dado que no nos permiten *probar* todas las oraciones verdaderas en dichas clases.

Por ejemplo, considérese el adoptar TA. Si lo que se quiere es identificar a la clase de equivalencia del modelo estándar (a la clase de modelos que hacen verdaderas a las mismas oraciones que N) decir simplemente "es la clase de modelos de la teoría formal que contiene a las oraciones verdaderas de N" no parece decirnos nada. Al contrario, el proyecto de capturar formalmente una teoría consiste en encontrar un conjunto finito -o al menos computable- de oraciones a partir del cual podamos hacer *pruebas* para determinar si una oración A es o no verdadera en el modelo estándar. Si bien es posible construir esas pruebas en TA, lo que TA no nos dice es qué podemos usar como premisas o puntos de partida. El caso de Z_2 interpretada con una semántica de segundo orden es el inverso, tenemos teorías axiomatizables pero imposibilidad de construir las pruebas correspondientes (es decir, lo que Barrio llama PA_2 valida semánticamente más cosas que aquello que es capaz de probar Z_2 o cualquier otra teoría recursivamente axiomatizable).

A partir de estas críticas puede concebirse una noción alternativa de capturabilidad, más cercana a lo que se buscaba desde un principio al axiomatizar teorías. Considérese el modo como el proceso de axiomatización de teorías matemáticas se desató históricamente. En primer lugar, puede existir una cierta práctica intuitiva, como contar y sumar cosas, o hablar de colecciones y sus elementos, etc.; esa práctica fue primero teorizada de una manera no formalizada, en lenguaje matemático *naïve*. Luego, se generaron a partir de ello ciertos problemas con dichas teorías no formalizadas; por ejemplo, el surgimiento de paradojas —como ocurrió en la teoría de conjuntos—, o de resultados contra-intuitivos, con la consiguiente duda acerca de si se está o no razonando bien —p.e. con el desarrollo de las geometrías no euclídeas—, etc. Y es para solucionar *esos* problemas que se formula una teoría axiomatizada. Russell enuncia todo esto de manera clara en 1901:

> Lo que queremos saber es qué puede ser deducido de qué (…). [Al construir un sistema axiomático] descubrimos qué debe ser tomado como premisa y qué debe ser demostrado o definido. (Russel, 1901, p. 61, traducción propia)

Es decir, la principal ganancia o utilidad que se espera obtener de la construcción de un sistema axiomático está en el plano *epistemológico*. Lo que se desea es obtener el conjunto mínimo de cosas que es necesario aceptar para poder obtener, mediante pruebas estrictas, un conjunto relevante de resultados ya obtenidos anteriormente. En términos de Russell, los axiomas deben ser "necesarios y suficientes", donde lo primero significa independientes (para que ese conjunto sea mínimo), y lo segundo debe ser entendido en el sentido anterior, de capturabilidad de lo disponible en la práctica informal (para más sobre la concepción de Russell véase Korhonen, 2013, p. 49-51, 241).

Por supuesto que Russell está al tanto de que lo que se busca no es la obtención de *todos* los resultados obtenidos informalmente (esto es obvio en el caso de las paradojas). De este modo nota que:

> Ahora bien, en un comienzo [cuando contamos sólo con teorías informales], todo es autoevidente; y es muy difícil ver si una proposición autoevidente se sigue de otra o no. La obviedad es siempre la enemiga de la corrección (…). [Por ejemplo] es tan obvio que dos y dos son cuatro que difícilmente podemos volvernos escépticos como para dudar acerca de la posibilidad de que ello pueda ser probado. (…). [Sin embargo] desde que la gente ha intentado probar proposiciones obvias, ha descubierto que muchas de ellas son falsas (Russel, 1901, p. 61, traducción propia).

Nuevamente queda ilustrado el rol que la formalización y la axiomatización cumple para Russell, la cual es pensada siempre como un modo de obtener una ganancia epistemológica sobre las versiones *naïve* de teorías matemáticas. En lo que sigue desarrollo una concepción acerca de la expresividad o capturabilidad que es más cercana a estos objetivos originales, pero que tiene en cuenta los desarrollos actuales en el área (y que podría, por lo tanto, diferir de ciertos modos en el conjunto de proposiciones que se considera relevante probar; véase más adelante). Se aplica esta concepción, además, al caso de la aritmética, considerando la pregunta de cuál de las axiomatizaciones disponibles es la más adecuada expresivamente.

Diré que una teoría informal P es capturada por un sistema formal T si y solo si T es recursivamente axiomatizable y es capaz de probar todas las proposiciones interesantes que conciernen a P. Entre ellas habrá tanto cosas para las cuales hay "pruebas" (aquí la noción de "prueba" es una noción menos precisa que la noción formal de prueba) —p.e. el teorema de Cantor—, como a —al menos algunas— cosas consideradas "autoevidentes" (por ejemplo, "2+2 = 4").

Al decir que debemos probar las oraciones interesantes de la teoría informal no estoy afirmando que se deben probar exactamente las mismas oraciones (porque los lenguajes son distintos, eso no se podría hacer) sino sólo a oraciones que tienen la misma estructura sintáctica, bajo alguna elección de un símbolo para representar una noción informal; por ejemplo eligiendo a la función f_2 para representar a la suma. Podría objetarse que esto hace uso implícito de la noción semántica de interpretación (y particularmente, que presupone la idea de "interpretación estándar"), sin embargo, lo único que se está pidiendo es que se establezca (convencionalmente) una correspondencia entre símbolos, no se está usando la noción de modelo ni exigiendo la restricción de modelos a ciertas clases.

Para ver esto más claramente, podría pensarse que lo que estoy exigiendo —en términos semánticos— es que se restrinja la clase de los modelos a aquellos que resultan interesantes pragmáticamente. Esta clase sería "más chica" (una subclase) que el conjunto de los modelos de PA y "más grande" que el de PA_2 (porque PA_2 fija el valor de verdad de algunas oraciones poco interesantes pragmáticamente). Hay dos motivos por los cuales esto difiere de mi propuesta. En primer lugar, en que el énfasis está en el *modo* como ocurre esta restricción, que es *por medio de la demostración de ciertas oraciones*. De otra manera se abriría la posibilidad de fijar esta clase introduciendo algún cambio a nivel metateórico, por ejemplo, en la semántica (de modo semejante a como lo hace PA_2). Por ejemplo, podría simplemente modificarse la semántica de modo tal que todos los símbolos de PA sean constantes (que no estén sujetos a reinterpretación) y cuyo dominio esté fijo, restringiendo así —aunque de manera espuria— la clase de interpretaciones a un único modelo. En resumen, lo que se estaría pidiendo es que se fije esta clase de modelos *probando oraciones en una teoría T que sea correcta y completa respecto de la semántica*.

Pero a su vez, y en segundo lugar, entre estos modelos habrá algunos no isomórficos entre sí, y otros cuyos dominios no concuerden. Lo que se está pidiendo más que una restricción de los modelos es una restricción *de los teoremas* a una clase de teoremicidad interesante. A fin de cuentas, expresamos cosas *por medio de oraciones* (expresar algo es poder decirlo), con lo cual la cuestión de la expresividad tiene más que ver con los conjuntos de oraciones que podemos afirmar que con los modelos que satisfacen o no a esas oraciones bajo determinadas semánticas.

Volviendo a la aritmética, la cuestión ahora pasa a ser qué es P, es decir, cuál es el conjunto interesante de las oraciones aritméticas que queremos que nuestro sistema pruebe para decir que se ha capturado la aritmética. Si P es, tal como sostiene Da Ré, aquello que usamos en nuestras prácticas de razonamiento cotidianas, por ejemplo cuando vamos al supermercado, entonces PA es más que suficiente para capturar a la aritmética. Pero esto es demasiado débil, no tenemos por qué considerar que las oraciones interesantes son solo aquellas que utilizan los legos en sus prácticas de ir al supermercado[13]. Un paso más que podría darse es preguntarse por lo que los matemáticos fueron capaces de probar informalmente antes del desarrollo de la aritmética formal (entre cuyos resultados puede haber algunos que no sean cotidianos/intuitivos —esto es más claro con ramas de la matemática como la teoría de la probabilidad—). La concepción russelliana implicaría que debe capturarse a ese conjunto. Nuevamente, PA resultaría adecuada a esos fines.

13. Esto contaría como una segunda objeción a este autor. Una tercera se sigue directamente de mi definición de capturabilidad: puesto que no tenemos una teoría axiomática de la recursividad la solución de Da Ré no nos permite construir pruebas para todas las oraciones interesantes.

Es sabido, sin embargo, que PA es incapaz de probar ciertos teoremas del análisis necesarios para la hacer ciencia empírica, y que puede ser fortalecida de diversos modos para lograr demostrarlos. Dichos teoremas parecen ser también interesantes, en el sentido de que son útiles para la comunidad científica en general[14].

14. Quizás este sea un sentido distinto de "interesante" al utilizado anteriormente, relacionado con el desarrollo anterior de la propia aritmética. Aun así no parece problemático sostener que resultados que son pragmáticamente útiles a los científicos deben ser preservados.

Una pregunta algo más desconcertante, y que podría llevar a extender aun más la clase de las proposiciones interesantes, es lo que ocurre con cosas como la oración de Gödel o la oración de consistencia (también llamadas G y Con usualmente). ¿Pueden ser consideradas ellas oraciones interesantes? En principio, no parece haber motivos para limitarse temporalmente al período pre-axiomático, sino que las primeras formulaciones axiomáticas pueden haber ayudado a notar que había más oraciones interesantes que aquellas conocidas anteriormente. Además, estas oraciones parecen expresar propiedades importantes de los sistemas axiomáticos (especialmente Con). Obviamente no puede pedírsele a ninguna teoría que demuestre su propia oración de consistencia, pero si podría pedírsele que demuestre la consistencia de una porción o sub-teoría suya (tal como se consideró anteriormente con el caso de T(PA)).

Teniendo todo esto en cuenta, lo más razonable parece ser adoptar alguna posición intermedia. Sea cual sea la respuesta que demos a las preguntas anteriores (especialmente a la última), no parece ser necesario adoptar algo tan fuerte como Z_2, ni mucho menos PA_2, como argumenta Barrio. Claramente no todas las oraciones indecidibles de PA son oraciones que expresan proposiciones interesantes, o por las cuales alguien podría razonablemente estar preocupado. Algunas de ellas se deducirán de G o Con, en caso de tenerlas como teoremas, pero existen otras tantas (infinitas de hecho) independientes de ellas.

En cambio, existen sistemas intermedios, que surgen de restringir las instancias aceptables del esquema-axioma de comprensión de diversas maneras, que podrían lograr una capturabilidad más fina (para un tratamiento pormenorizado de esos sistemas intermedios puede verse Simpson, 1991). Los sistemas ACA y ACA_0 (véase Smith, 2007)[15] parecen especialmente buenos candidatos. Ambos logran probar los teoremas del análisis necesarios para hacer ciencia empírica, siendo que la principal diferencia entre ellos estaría en probar o no las oraciones de Gödel y consistencia de PA.

15. Smith nota, interesantemente, que dada la equivalencia entre algunos sistemas intermedios y ciertas teorías formales de la verdad (como ser, la equivalencia entre ACA y T(PA) y la equivalencia entre ACAo y T(PA)|) la discusión acerca de la elección de un sistema intermedio sobre otro está relacionada con la discusión sobre la conservatividad en el marco de la elección de una teoría de la verdad.

En síntesis, está por fuera del alcance de este artículo determinar de un modo concluyente cuál es la mejor axiomatización de la aritmética. Existen, además de los mencionados, otros sistemas intermedios que deben ser considerados. El punto es que tal elección dependerá, como se ha mostrado, de criterios que son —al menos en parte— pragmáticos. He considerado cuáles deberían ser algunos de esos criterios (aplicados al caso de la aritmética, pero que valen en general), como ser, la capturabilidad o reproducibilidad formal de ciertas prácticas cotidianas, la capacidad de probar de manera estricta los principales resultados obtenidos informalmente por los matemáticos, la capacidad de probar todo aquello que requieren otras ramas de la ciencia (por ejemplo, las ciencias empíricas) y la capacidad de probar oraciones que surgen a partir del estudio de los sistemas axiomáticos mismos (como G y Con). Creo que estas distinciones brindan un marco fructífero para continuar la discusión acerca de cuál sistema axiomático adoptar en cada caso, y en la aritmética en particular.

Conclusiones

En este artículo he examinado la tesis usual de que para que una teoría formal logre capturar una práctica o teoría informal es necesario que restrinja la clase de sus modelos de ciertos modos (por ejemplo, hasta una única clase de isomorfismo). Dicho examen ha llevado a un rechazo de esa tesis, bajo la idea de que, si fuese cierta, no podría decirse que ninguna teoría formal logra capturar a su dual informal. En su lugar, se ha elaborado una noción alternativa de capturabilidad (y por lo tanto de expresividad), la cual se basa en la noción de "prueba de las oraciones interesantes" en una disciplina. Se ha mostrado además como esta concepción tiene ciertos antecedentes tempranos en la historia de la lógica y la filosofía de las matemáticas, y el modo como estos antecedentes pueden ser adaptados y revisados a la luz de resultados más recientes (p.e. teniendo en cuenta los resultados de Gödel). Por último, respecto de la aritmética, se ha sugerido que la mejor axiomatización debe encontrarse en algún "sistema intermedio", sobre la base de este nuevo criterio de capturabilidad. La elección precisa de un sistema requiere un estudio más pormenorizado de todas las alternativas que el que puede darse aquí, sin embargo, se han dado algunos criterios para efectuar tal elección, que ayudan a encaminar el debate futuro.

Bibliografía

» Barrio, E. [en el presente volumen]. 'Lógica de Segundo Orden y el Modelo Estándar de la Aritmética'.

» Bays, T. (2000). 'Reflections on Skolem's Paradox', en http://www3.nd.edu/~tbays/papers/pthesis.pdf.

» Castro Albano, J. (2014). 'La paradoja de Russell', en E. Barrio 'Paradojas, paradojas y más paradojas', en Barrio, E. (ed.) *Paradojas, paradojas y más paradojas*. Londres: College Publications.

» Da Ré, B. [en el presente volumen]. 'El modelo estándar de la aritmética: recursividad y lógica de primer orden'.

» Korhonen, A. (2013). *Logic as Universal Science: Russell's Early Logicism and its Philosophical Context*. Nueva York: Pallgrave McMillan.

» Moulines, C. U. (2002). 'Dónde se agazapa la pragmática en la representación estructural de las teorías', en Díez, J.A. & Lorenzano, P. (eds.), *Desarrollos actuales de la metateoría estructuralista*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Quilmes.

» Putnam, H. (1980). 'Models and Reality'. *The Journal of Symbolic Logic*, 45(3), 464-482.

» ——— (1981). *Reason, Truth and History*. Cambridge: Cambridge University Press.

» ——— (1983 [1981]). *Realism and Reason*. Cambridge: Cambridge University Press.

» Roffé, A. (2014). 'La paradoja de Skolem', en Barrio, E. (ed.) *Paradojas, paradojas y más paradojas*. Londres: College Publications.

» Russell, B. (1918 [1901]). 'Recent Work on the Principles of Mathematics', *International Monthly*, 4, 83–101; Reproducido como "Mathematics and the Metaphysicians," en B. Russell, *Mysticism and Logic and Other Essays*, Londres: Longmans, Green & Co., 59–74.

» Simpson, S. (1991). *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Berlin: Springer.

» Smith, P. (2007). 'On Some Subsystems of Second-Order Arithmetic – 1. Induction, more or less', en http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/SubsystemsRevised.pdf