

De la escritura de “números grandes” a las relaciones entre sistema de numeración y medida

Discusiones entre maestros e investigadores en el marco de un trabajo colaborativo



Héctor Ponce

Universidad Pedagógica Nacional.

Graciela Zilberman

Universidad Pedagógica Nacional.

Fecha de recepción: 26 de septiembre de 2021

Fecha de aceptación: 28 de diciembre de 2021

Resumen

Este artículo presenta una experiencia de trabajo colaborativo entre maestros de una escuela pública de la ciudad de Buenos Aires y dos integrantes del equipo de investigación en educación matemática para el nivel primario de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). El texto ofrece la reconstrucción de un proceso de diálogo y elaboración de ideas a propósito del trabajo con escrituras numéricas en el segundo ciclo de la escuela primaria. El recorrido permite también analizar algunos aspectos referidos a la construcción de la colaboración entre docentes e investigadores que se reúnen sistemáticamente para analizar problemas relativos al tratamiento en el aula de ciertos contenidos escolares. En ese sentido, busca contribuir al debate sobre las complejas relaciones entre investigación y enseñanza.

Palabras clave: trabajo colaborativo entre docentes e investigadores; didáctica de la matemática; escrituras numéricas; prácticas de enseñanza; enseñanza de la matemática.

From “large numbers” writing to the relationships between the numbering system and measurement. Deliberations between teachers and researchers in the framework of collaborative work

Abstract

This article presents a collaborative work experience between teachers from a public school in Buenos Aires and two members of the research team in mathematics education from the Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). The text shows the reconstruction of a process of dialogue and the elaboration of ideas about the work with numerical writing in the second cycle of elementary school. The course allows the analysis of several aspects regarding the construction of the collaboration between

teachers and researchers that gather together systematically to go over the problems related to the classroom management of certain school subject matters. In this respect, it attempts to contribute to the debate around the complex relations between research and teaching.

Keywords: collaborative work between teachers and researchers; didactics of mathematics; numerical writing; teaching practices; teaching mathematics.

Introducción

Este artículo recoge la experiencia de trabajo desarrollada durante más de un año por un equipo constituido por dos maestros y una maestra de segundo ciclo¹ de una escuela pública de la ciudad de Buenos Aires y dos integrantes del equipo de investigación en educación matemática para el nivel primario de la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).² Se propone dar cuenta de la construcción de un conjunto de ideas elaboradas en un espacio de trabajo compartido, con la intención de entablar un diálogo con los docentes a raíz de algunos resultados surgidos de una investigación sobre escrituras numéricas de los alumnos. Efectivamente, en una investigación de corte psicológico (UBACyT 200220130100491BA)³ se pudo establecer que niños que leen y escriben números de hasta cuatro cifras, formulan —al ampliarse el rango numérico— nuevas hipótesis que no tienen cabida en el trabajo con números más pequeños y que sus conocimientos no se extienden de manera directa a una porción de números de rango mayor.⁴ Nos preguntamos si estos datos, que conciernen a un tema escolar, podrían ser relevantes o interesantes para docentes a cargo de la enseñanza en este tramo de la escuela primaria. La pregunta surge frente a la constatación de —y a la preocupación por— un cierto divorcio entre resultados de investigaciones que se refieren a procesos de adquisición de los alumnos y su recuperación por parte de los docentes para tomar decisiones sobre la enseñanza. Para darle curso concebimos y gestionamos un espacio institucional de intercambio sistemático con la maestra y los maestros a los que hemos hecho referencia.

Conocer más profundamente los procesos que los alumnos desarrollan al trabajar con “números grandes”,⁵ el tipo de errores que cometen o las ideas que elaboran cuando se confrontan con escrituras que no han sido tratadas específicamente en la escuela, ¿resultan un aporte para la enseñanza? Si fuera el caso, ¿se verían los maestros orientados a integrar esas consideraciones a sus prácticas?, ¿bajo qué condiciones?, ¿qué ideas pueden surgir a propósito del intercambio sobre estas cuestiones? Se trata de preguntas que necesitan de una conversación sostenida entre investigadores y docentes. Efectivamente, sabemos que los estudios que se realizan sin tomar en cuenta los condicionamientos de la institución escolar no pueden aplicarse sin más a los intercambios del aula (Castorina 2008; Bronckart 2010). Asimismo, la discusión sobre un contenido

1 En la ciudad de Buenos Aires (donde se realizó el estudio mencionado), el segundo ciclo de la escuela primaria comprende de 4º a 7º grado escolar. Se trata de niños de entre 9 y 12 años de edad.

2 El equipo que lleva a cabo esta investigación está compuesto por los autores de este texto y es dirigido por la Dra. Patricia Sadovsky. La indagación forma parte del proyecto “Análisis de problemas, objetos y prácticas de enseñanza de la matemática en el marco del trabajo colaborativo entre investigadores y maestros. Producción de conocimientos y condiciones de funcionamiento”, aprobado en el marco de la convocatoria PICTO-UNIPE 2017-0033, con sede en la Universidad Pedagógica Nacional.

3 “El aprendizaje del sistema de numeración en secciones múltiples rurales de 1º ciclo y en aulas urbanas de 2º ciclo”. Directora: Flavia Terigi. Codirectora: Susana Wolman. Programación UBACyT (2014-2017).

4 Para un detalle de los resultados de esta indagación puede consultarse “Informe final proyecto 20020130100491BA” y Ponce (2020).

5 En este texto llamamos “números grandes” a aquellos que son mayores al rango previsto en el Diseño Curricular para cada grado en esta jurisdicción. Como veremos, esta definición será resignificada por los docentes participantes a lo largo de las reuniones.

específico de enseñanza requiere, desde nuestro punto de vista, la consideración de la experiencia de los maestros al respecto, así como también la incorporación de saberes docentes que exceden lo estrictamente didáctico (Castorina y Sadovsky, 2018).

Este posicionamiento, al reconocer el aporte de saberes de todos los participantes, rechaza la clásica división entre docentes e investigadores en la que los maestros ocupan el lugar de ejecutores prácticos y los investigadores aportan los elementos teóricos (Sadovsky *et al.*, 2015). En este sentido, la propuesta de encuentro con los docentes tenía el objetivo de abrir un diálogo sobre la enseñanza del tema a propósito de los resultados referidos, en un marco de colaboración. Se alejaba en consecuencia, de la intención de que los maestros llevaran a cabo algunas actividades de enseñanza en sus aulas a partir de los resultados de una investigación anterior.

Desde la perspectiva de trabajo colaborativo asumida para esta investigación, hicimos propia una doble preocupación (Bednarz, 2015): pensar en la relación entre investigación y docencia como constitutiva de la producción de conocimiento sobre la enseñanza y comprender mejor la complejidad de las prácticas. El trabajo previsto con los maestros, en este marco, está asociado inicialmente al sistema de numeración pero, como veremos, los temas de discusión se van redefiniendo con el correr de las reflexiones en el trabajo común, a la luz de nuevas problemáticas que el análisis compartido ayuda a visibilizar.

A propósito de la construcción de la colaboración, tomamos de Sensevy (2011) la idea de que para construir una relación colaborativa es necesario establecer una simetría entre investigadores y docentes basada en la elaboración compartida de razones en el marco de las tareas que se realicen (por ejemplo, la definición de cuestiones a analizar, las interpretaciones de escenas de aula o producciones infantiles), antes que en la negación de las diferencias.

Estas premisas iniciales encuadran el comienzo del trabajo compartido. Sin embargo, el carácter colaborativo no es un hecho definido *a priori*, sino que, por el contrario —y como desarrollaremos en este texto— es parte de una construcción que se va realizando con el devenir de las interacciones, sobre la base de los puntos de partida antes mencionados. Señalemos también que el análisis de los intercambios que se van desarrollando en el espacio de trabajo posibilita de manera progresiva la construcción de conocimiento sobre la naturaleza misma de la colaboración, que es uno de los objetos de nuestro estudio.

Aspectos metodológicos

En este marco, entre finales de 2018 y durante todo el ciclo lectivo 2019, llevamos a cabo encuentros quincenales con los maestros Sebastián y Martín de cuarto y quinto grado, respectivamente, y con Mirta, la maestra de sexto y séptimo grado, en la escuela en la que se desempeñaban.⁶ Este grupo de docentes fue invitado a instancias de la supervisora del Distrito a partir de su interés permanente por reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza. Asumido que otorgábamos a los intercambios una potencialidad para producir nuevas comprensiones sobre la enseñanza, resultaba central contar con un registro de las reuniones para poder retomarlas y analizarlas. Por esa razón,

⁶ Agradecemos el trabajo y la participación de los docentes Sebastián Pardelli, Martín Dobal, la docente Mirta Escaladas y el apoyo de la directora de la escuela 22 DE 16, Marcela Deidda, la vicedirectora María Eugenia Bajo y la secretaria, Claudia Sagraria. Extendemos nuestro agradecimiento a la supervisora del distrito escolar, Mónica Lamas.

acordamos con los docentes grabar en formato de audio los diálogos desarrollados en los encuentros de manera que ese material, al ser transcrito, pudiera ser consultado y analizado como insumo de la indagación. Las transcripciones estuvieron disponibles para todos los integrantes del grupo y se guardaban en una carpeta electrónica a la que todos los participantes tenían acceso. Con el avance del proyecto, también se archivaron en esa misma carpeta las producciones que los maestros acercaban a los encuentros, tanto realizaciones de los alumnos como recortes de escenas de clase.

Por otra parte, a partir de las desgrabaciones, los investigadores realizábamos una síntesis recuperando las ideas discutidas en cada reunión, que eran compartidas al inicio del encuentro siguiente. Esto permitía evocar y retomar asuntos ya tratados, a la vez que posibilitaba la sistematización y conceptualización de los temas producidos en las conversaciones desarrolladas.

Los tiempos pautados para los encuentros fueron acordados con el personal de conducción de la escuela en función de la agenda de los tres maestros y de sus disponibilidades. El cronograma fue elaborado dentro del horario escolar y los encuentros se llevaron a cabo en la institución en la que se desempeñan los docentes. La duración de cada reunión fue de aproximadamente una hora reloj. Solo unas pocas veces pudo extenderse ese lapso unos minutos más, ya que dependía de los tiempos en que cada uno de ellos debía retomar las tareas en sus respectivas aulas.

¿Y mis alumnos también lo harán? Una pregunta que se introduce a partir de los datos presentados

Las primeras reuniones estuvieron centradas en la presentación de producciones de los alumnos recolectadas en la investigación anterior ya referida y permitieron precisar los modos de concebir las escrituras numéricas por parte de los niños, como también reflexionar sobre posibles interpretaciones. Estas escrituras intentaban mostrar el carácter problemático que tienen para los escolares las notaciones numéricas cuyo rango excede lo trabajado en la escuela y no se proponían como un repertorio acabado de producciones concebido *a priori*.

A partir de estos intercambios, los maestros decidieron espontáneamente hacer algunas experiencias de manera informal para indagar qué sucedía si se encontraban con escrituras numéricas similares a las analizadas. Uno de los docentes le propuso escribir un conjunto de números a un pequeño grupo de alumnos de quinto grado, en una breve escena de dictado,⁷ durante un intervalo del trabajo en el aula. Otro de los maestros consultó a varios adultos fuera de la escuela, cómo escribirían algunos números específicos del rango de los millones con ceros intermedios y también le planteó a sus alumnos de sexto grado la escritura de manera colectiva de uno de los números cuyas notaciones habían sido analizadas en reuniones previas.⁸ Estos materiales comenzaron a ser puestos sobre la mesa como un primer ingrediente del trabajo compartido.

Resultó interesante que los maestros se dieran a la tarea de buscar de manera personal indicios de aquello que los investigadores habíamos compartido, usando incluso los mismos números cuyas escrituras erróneas habían sido analizadas en reuniones anteriores. ¿Qué esperaban encontrar? Entendemos que las producciones llaman la atención, generan curiosidad: *¿cómo enfrentarán mis propios alumnos la tarea de escribir estos números?* Es probable que los maestros se hayan sentido convocados a

⁷ Entre ellos propuso cuatrocientos cuatro mil cuatro, que había sido uno de los números cuyas diversas escrituras se habían analizado en reuniones anteriores.

⁸ El número dictado fue ocho millones ochenta mil ochenta.

explorar e interpretar las producciones de sus alumnos en términos de ideas y sus intentos para ajustarlas.

El siguiente fragmento pertenece a la reunión en la que analizamos las escrituras que aportó uno de los maestros y ofrece algunas pistas para pensar sobre estas cuestiones, a partir de una situación de dictado de números.

Sebastián: algo que hice en sexto que les quería contar. Esto hice yo: ocho millones ochenta mil ochenta.

Héctor: ese es el número, ¿pero qué hiciste?

Sebastián: Llegué a la clase enajenado [risas]. Estaban trabajando en grupos para la muestra de Ciencias y les dije, “Bueno, a ver, pasen en grupos. Tienen que escribir ocho millones ochenta mil ochenta”.

(...)

Sebastián: un grupo lo escribió bien, pero el que me llamó la atención puso ocho millones, ocho punto cero, cero, cero, cero, cero, cero y aparte ochenta mil ochenta (8.000.000.80.080). Me entregaron un solo número, una cosa... [indicando que la cantidad de cifras era muy grande con las manos]. Y aclaré que era un solo número. O sea, ahí me sentí mal porque claro, dejaron un espacio (...). Y cuando me lo entregaron me dijeron... “acá hay algo mal, pero... ¿vos cómo dictaste?”.

Entre las cuestiones que se destacan de este fragmento, resulta remarcable la inmediatez de la intervención. Esta escena ocurre a continuación de la reunión en la que se había discutido este tipo de escrituras. Y, el relato es, en cierta medida, una manera de confirmar en el espacio de trabajo compartido, que sus alumnos encuentran la misma complejidad analizada al enfrentarse con números del orden de los millones, cuya escritura en nuestro sistema de numeración tiene varios ceros intermedios (por ejemplo, 8.008.008; 4. 404.004, etc.).

El diálogo también permite pensar —desde nuestro punto de vista— sobre el hecho de que es posible que en el desarrollo de las clases queden ocultas muchas ideas que los niños tienen y que no llegan a expresarse en las aulas, y que el contacto con los datos de la investigación permitió que este docente las identificara.

Entendemos que el entusiasmo por recoger producciones de números similares a los analizados está influenciado por el tipo de escena en la que esos resultados se compartieron. En efecto, al examinar el material no se planteó una perspectiva evaluativa sobre los errores de los niños, ni sobre lo que la enseñanza debería hacer para evitarlos o corregirlos, si es que pudiera. Sino que la conversación giró en torno a las posibles ideas infantiles involucradas en esas notaciones. En ese sentido, hay una comunicación implícita que convoca a los maestros a una posición interpretativa sobre las producciones. Consideramos que estas interpretaciones resultan gratificantes porque amplían los márgenes de comprensión de los docentes respecto de las respuestas de sus alumnos y, al mismo tiempo, arman lazo con los investigadores porque comprender lo que los estudiantes piensan es una necesidad y una búsqueda compartida entre unos y otros.

En síntesis, a partir de los primeros encuentros con los docentes, en los que compartimos unos datos iniciales y una pregunta respecto de qué le puede ofrecer esta investigación al trabajo en el aula, los maestros recogen de manera espontánea e informal algunas resoluciones, que se convierten en el centro de las reuniones donde el diálogo comienza girando en torno a la interpretación de ese material y la enseñanza. Este

proceso deriva en un análisis acerca de las opciones que hacen los maestros, relativas a las escrituras numéricas. Se va instalando poco a poco un proceso de colaboración.

Ahora bien, si la colaboración no es un *a priori*, sino que es precisamente, punto de partida y resultado del trabajo conjunto, vale la pena entonces preguntarse por sus características, su funcionamiento y su devenir.

¿Cómo es este entramado entre docentes e investigadores? ¿Cómo afecta mutuamente lo que sucede dentro y fuera del aula? ¿Cómo se van delineando algunas cuestiones sobre la enseñanza en esas interacciones entre unos y otros actores? De estas cuestiones —cuyas respuestas lejos de ser universales dependen de las condiciones en las que se desarrollan los intercambios— nos ocuparemos a continuación.

Los encuentros entre maestros e investigadores y las escenas de aula

Con el propósito de comprender mejor el modo en que se organiza la conversación con los docentes sobre la base de la indagación que los investigadores aportamos al espacio, analizaremos tres escenas que hemos recortado de los registros de las reuniones.

Los datos sobre las escrituras numéricas obtenidos fuera del ámbito escolar habilitan un diálogo que problematiza las propias opciones de los docentes. En efecto, los maestros reparan en algunos aspectos de la investigación sobre números grandes, como el criterio de cantidad de cifras para ordenar números o la noción de recursividad como estructurante del sistema de numeración⁹ y parecen preguntarse —a partir de estos conceptos— sobre su propio proyecto de enseñanza. Es así como reflexionan sobre la opción de abordar en sus clases las escrituras numéricas a propósito de las medidas en comparación con un tratamiento centrado en el sistema de numeración exclusivamente.

A partir de los ejemplos que los maestros proponen para analizar, referidos a sus prácticas, podría inferirse que ellos consideran que los usos sociales de las escrituras numéricas constituyen la fuente principal del sentido para sus alumnos en desmedro de los tratamientos de las notaciones en tanto sistema provisto de una estructura, sin referencia a una aplicación particular.

Las escenas que comentaremos permiten también analizar los distintos propósitos con los que los docentes recurren a los usos de los números en diferentes contextos: para dar sentido a una situación, para proponer un contraejemplo, o para que los alumnos tengan modos de controlar sus propios resultados.

Escena 1: “números grandes”, entre el sistema de numeración y el contexto de la medida

La escena que planteamos a continuación, que protagonizan Mirta y Sebastián, procura ilustrar el diálogo entre las ideas esbozadas a raíz de las producciones infantiles sobre números grandes y sus propias opciones para el aula. El análisis compartido de las escrituras surgidas de la investigación anterior permite a estos maestros formularse nuevas preguntas y revisar las decisiones sobre sus propuestas de enseñanza.

⁹ En los sistemas de numeración posicionales las escrituras se organizan sobre la noción de agrupamiento recursivo en una base (10 en el nuestro). De ahí deviene el hecho de que a mayor cantidad de símbolos, mayor es el número, lo cual permite a la vez ordenar y comparar escrituras de distinta cantidad de cifras sin conocer el nombre de los números.

Mirta: yo creo que el punto está ahí, porque cuando hablamos de números sin restricciones y hablamos de números grandes, un poco la postura es... cómo se encara en la vida cotidiana el uso de números grandes, entonces ahí vinimos con esto de que escribimos una parte en números y otra parte en letras ¿viste? porque tratamos de redondear. Pero ¿qué pasa cuando no es esa la situación, cuando no lo escribo como me resulta más cómodo?, ¿no? (...) Sería un desafío que, la verdad, nosotros no estábamos enfrentando, porque bueno, la decisión había sido ver qué pasa en la vida cotidiana. Y en la vida cotidiana cuando te encontrás con números muy grandes, tratás de simplificarlos de alguna manera para que entren en el texto del diario. No sé... entren en el cartelito.¹⁰ (...) Digamos... que tenga una coma y que tenga una palabra, no quiere decir que la coma está instalada en un lugar determinado. (...) Lo leen en el diario, dieciocho coma cinco miles de personas es una cosa y ocho coma cinco millones de personas es diferente.

Héctor: sí.

Mirta: y hacer esa conversión sí, es como que están acostumbrados... pero bueno, los ceros intermedios, los números con otros números, digamos...

La maestra alude al redondeo y a la escritura combinada en números y letras pero al comparar su opción con las notaciones que nosotros aportamos se pregunta sobre aquello que la situación contextualizada no permite analizar.

Las intervenciones de Mirta ubican el trabajo en el contexto de la medida en el que se considera al mil o al millón como unidad. Pareciera que esta es una decisión didáctica que ella ha tomado, probablemente en diálogo con el Diseño Curricular, en la que el trabajo con números grandes se coordina con relaciones estudiadas a propósito de las expresiones decimales para números racionales. Esta contextualización aporta nuevas relaciones y, a la vez, oculta otras. Por ejemplo, la posibilidad de apelar a unidades distintas genera un conjunto de situaciones que Mirta señala como interesantes porque la magnitud del número ya no puede ser identificada solo a partir de la cantidad de cifras.¹¹ Esto es, puede ocurrir que una expresión tenga más cifras enteras y sea menor que otra. Por ejemplo 72,4 miles y 3,5 millones. Interpretamos que ese es el sentido de su comentario al señalar que “dieciocho coma cinco miles de personas es una cosa y ocho coma cinco millones de personas es diferente”.

En la situación que plantea Mirta está presente la idea de comparación de esas escrituras. Y para poder compararlas es necesario pensar en la equivalencia entre las unidades utilizadas.

Otro aspecto interesante del fragmento anterior es que Mirta indica que el tipo de actividades que venía desplegando con sus alumnos está asociado al uso cotidiano de los números grandes, en particular en las formas de escribir como las que aparecen en el diario. De esta manera pareciera asegurarse la disposición de referencias para que los alumnos tomen en cuenta al validar sus escrituras.

La discusión sobre las posibilidades didácticas de este contexto, que forma parte de las decisiones de Mirta sobre la enseñanza, previas a nuestros intercambios, enriquece las conversaciones en el espacio con los docentes ya que se analizan numerosas relaciones matemáticas que se pueden establecer con los alumnos al comparar números escritos

¹⁰ Con esta expresión y con los gestos que la acompañan, Mirta se está refiriendo al tamaño que puede ocupar una escritura en el titular de un diario o en el cuerpo de una nota.

¹¹ Notemos que al introducir estas notaciones deja de cumplirse que si un número tiene más cifras que otro, entonces es mayor, lo que permite compararlos sin necesidad de saber de qué números se trata.

apelando a distintas unidades. Algunas de ellas ya fueron señaladas respecto de la parte entera de la escritura y de las unidades a las que remiten. Otras posibles relaciones están asociadas a la parte no entera. Por ejemplo, en 18,5 miles ¿qué cantidad entera representa 0,5 miles? ¿Y 0,5 millones? ¿Y si se tratase de una expresión con más cifras a la derecha de la coma por ejemplo 0,54 miles?

Mirta en este caso y Sebastián, en el fragmento que comentaremos a continuación, se proponen plantear situaciones que favorezcan la comprensión de las escrituras numéricas en juego. Esta cuestión resulta más difícil cuando se trabaja con números grandes escritos de manera convencional tal como se los presentamos a los maestros, probablemente porque los puntos de apoyo para validar las escrituras se basan en la organización interna del sistema de numeración.

Sebastián: yo estuve buscando situaciones donde los chicos trabajen con números grandes.

Héctor: claro, sí.

Sebastián: y encontré que claro, que los seguidores de *twitter* y esas cosas, es algo que ellos manejan mucho más que yo, por lo menos.

Martín: está el k... y ese k es el mil.

Sebastián: sí, ¿pero sabés cómo está? Ellos ponen 5k, 10k. No sé de dónde viene k.

(...)

Sebastián: en realidad me surgió porque ellos, los chicos de 7mo. de la tarde me dicen...
(...) “profe a vos solo te siguen trescientas personas...” [Risas]

El planteo de Sebastián tiene algunos elementos en común con el de Mirta. Uno de ellos es que se trata de una situación en la que los números expresan grandes cantidades, y lo hacen aquí también, en el contexto de la medida y apelando a conocimientos sobre las expresiones decimales de los números racionales. Tener 5 k en *twitter* refiere a una cantidad de personas, como en el caso anterior. La composición de la escritura es también similar, ya que combina una expresión numérica y una unidad de medida. Sin embargo, en este caso no se apela a la palabra mil, sino a una letra que representa esa unidad. Y hay también —aportado por el contexto, como en el planteo de Mirta— la posibilidad de comparar las expresiones en una situación en la que para los alumnos tiene sentido hacerlo. Sin embargo, el tipo de problema es algo diferente. Sebastián lo expone de este modo:

Sebastián: (...) Esto es como decir: tengo un millón o tengo dos millones. Sí, pero si tenés un millón novecientos treinta y cuatro mil ochocientos quince pesos, no es lo mismo que decir un millón dos.

Mirta: claro, porque antes uno pensaba... aproximabas el centavo al peso, ponele. Y ahora estás hablando de una aproximación enorme...

Sebastián: sí, pero, yo a lo que voy es a que eso no lo piensan.

Mirta: escuchá. No, eso que vos estabas diciendo de cuando los chicos, tienen una k, como una medida, está bueno por ahí pensar qué diferencia hay entre una k y dos k.

Sebastián: y entre uno coma cinco y uno coma seis hay un montón de seguidores.

Mirta: estoy yo que soy uno solo, que ¿dónde estoy? Eso está bueno para pensar.

Sebastián: y ellos me preguntaban y yo les decía: “Pero si yo tengo uno coma cinco y él tiene uno coma cinco, ¿tenemos lo mismo?, ¿la misma cantidad de seguidores?” Y no. Y estamos hablando de personas.

Mirta: quizás piensan que agregándose uno... Por ejemplo, entre quince coma seis, y quince coma siete... capaz que piensan que es una persona.

Sebastián: entonces... digo, es esto: ellos no le dan importancia en ningún aspecto...

Mirta: porque no es un entero. Si soy uno solo entre todos, no soy un entero... ¿viste? Andá a saber qué elucubración hacen.

La preocupación central de Sebastián es que al utilizarse el mil como unidad, sus alumnos prescinden de la parte no entera de la expresión o tal vez consideren que los décimos de esa notación remitan a una sola persona y no a 0,1 de mil es decir, 100 personas. Por eso remarca que “...entre uno coma cinco y uno coma seis hay un montón de seguidores”.

Es este entonces, el sentido que Sebastián aporta al espacio de trabajo compartido en relación con la idea de comprender las escrituras en juego. El foco está puesto en el significado de la parte no entera de la expresión, lo que constituye una diferencia respecto de las actividades comentadas por Mirta anteriormente. En aquel caso hay distintas unidades en juego (miles y millones) y entonces —como ya mencionamos— no alcanza con considerar la parte entera para establecer cuál de las escrituras es mayor, es necesario tener en cuenta también cuál es la unidad en la que esa cantidad se expresa. En cambio, en la situación que plantea Sebastián, la unidad es la misma (k), y el interés está orientado hacia la comprensión de que entre dos expresiones enteras de k consecutivas hay una diferencia de mil, que representa una cantidad importante. Por ese motivo, mientras que en la situación que plantea Mirta sobre la escritura en el diario, alcanza con centrarse en el significado de la parte entera para comparar, en el caso que propone Sebastián, no puede desestimarse la parte decimal, tal como él lo señala: “Pero si yo tengo uno coma cinco y él tiene uno coma cinco, ¿tienen lo mismo?, ¿la misma cantidad de seguidores? Y... no”.

Notemos que la comparación entre las propuestas de Mirta y Sebastián permite hacer visibles relaciones que están en juego en los modos de expresar las medidas.

Detengámonos ahora en la escena donde ocurren estos diálogos. Más allá de las características específicas que diferencian o igualan los problemas que plantean Sebastián y Mirta, ambos docentes participan del espacio de trabajo aportando ideas sobre la enseñanza, a partir de conocer los resultados de la indagación presentada. Sin embargo, las propuestas y los interrogantes que exponen, no son una adaptación de sus actividades para dar lugar al trabajo con los números tal como fueron presentados.

En otras palabras, la cuestión que se está discutiendo no es de qué manera los docentes sumarían a los contenidos que prevén para el año próximo el trabajo con números grandes tal como fue presentado, sino que plantean contextos, formas de notación y problemáticas específicas que les resultan relevantes a partir de conversar sobre esos resultados.

En este punto es posible identificar un rasgo de la colaboración entre maestros e investigadores. Los datos que la investigación aporta al espacio compartido generan preguntas a los docentes respecto de situaciones que ya conocen y gestionan. Los fragmentos anteriores dan varias pistas sobre este hecho. Por ejemplo, Sebastián busca una situación en la que sus alumnos trabajen con números grandes y al encontrarla se interroga sobre el sentido que los estudiantes le dan a la parte no entera de la escritura. Mirta señala que en sus clases, el trabajo con números grandes está vinculado a actividades en las que intervienen unidades distintas y se pregunta por la conversión al plantear qué habría que hacer para escribir los números convencionalmente.

Este intercambio en el espacio de trabajo compartido va a permitir formular, de manera progresiva, un conjunto de preguntas genuinas sobre la enseñanza que, centradas en la reflexión sobre las notaciones, desborda el tratamiento del sistema de numeración, para ubicarse en el contexto de la medida. El proceso va a dar lugar a que docentes e investigadores establezcan relaciones entre el trabajo con las escrituras numéricas en uno y otro caso. Por ejemplo, ¿qué tienen en común las notaciones como las que relató Mirta con miles y millones como unidad, al abordar el sistema de numeración, con las que se despliegan usualmente al sumergirse en el sistema métrico? ¿Aporta el análisis de unas escrituras al analizar las otras? ¿Es posible para los alumnos establecer relaciones entre ambas? Estas son algunas de las preguntas que surgen como producto del trabajo, al reunir cuestiones que la organización de la enseñanza suele plantear de manera separada.

Escena 2: “tachemos los ceros porque no valen nada”

La escena que se plantea a continuación permite problematizar la función didáctica del uso de contextos específicos. A partir de una actividad inicial referida a datos de la Astronomía planteada en el libro de texto del curso, uno de los docentes ajusta la tarea proponiendo un cambio de contexto y también de rango numérico. El contexto original, que tiene una función de dar sentido a los números en juego, es evaluado como insuficiente por el docente para que sus alumnos controlen sus producciones. De allí la intervención planteada y también la posibilidad de identificar a partir de esta escena, la riqueza de sentidos y atribuciones que los docentes le adjudican a la utilización del contexto.

El siguiente intercambio transcurre en la quinta reunión que es la última del primer año de trabajo y tiene, entonces, un propósito de balance y perspectiva. Mirta comienza haciendo referencia a discusiones “interesantes” que se suscitaron con sus alumnos de sexto grado a propósito del trabajo con números grandes. Menciona ciertas confusiones que ocurrieron en su clase respecto del uso de la coma o el punto en la escritura de números con relación a cómo aparecen en el visor de la calculadora. Comenta que allí, los números se ven diferentes a la escritura habitual (el punto y la coma están invertidos) y esto provoca desconcierto al momento de tener que identificar la parte entera de un número y distinguirla de la que está a la derecha de la coma, es decir, la parte no entera. Luego de este comentario se produce el siguiente diálogo:

Mirta: fue toda una buena discusión, fue interesante: llegar al tema de que el punto es una ayuda para poder leer pero que no tiene un valor en sí mismo. Porque algunos te decían “falta el punto, ¿está mal sin el punto?”, “pero en algunos lugares no se escribe con el punto y da igual”. Eso me pasó con sexto. Y con séptimo este año empecé por Astronomía en Naturales, con el tema del Universo y estuvo bastante más asociado a números grandes.

Sebastián: claro, las distancias entre los planetas (...) yo también hice lo mismo de empezar con Astronomía para trabajar esto de la numeración, y ellos hicieron esto:

había un cuadrito en el libro que decía “distancias al Sol”: a Marte, tantos km; a la Tierra, tantos km... Entonces, había un ejercicio que era “¿A cuántos km queda Marte de Neptuno?, ¿a cuántos queda la Tierra de Mercurio?”, siempre comparado con la distancia al Sol. “Bueno, cómo podemos hacer para no trabajar con números tan grandes, porque profe, es un lío, qué sé yo, aunque son todos ceros, pero 17 millones de km, no sé” [repitiendo los dichos de sus alumnos]. Entonces, llegaron a la conclusión de que podíamos tajar tantos ceros como todas las distancias compartan. La distancia más corta era un millón, y la distancia más larga era 18 billones. Por ejemplo, de un millón para allá, los 6 ceros, los tachamos todos. “Entonces, ¿qué ponemos?” (...). Pero después cuando tienen que hacer operaciones se les arma un lío bárbaro, porque ¿qué pasa? (...) la concesión fue: ponemos la palabra millones.

Héctor: ah, estabas negociando con los chicos cómo escribían.

Sebastián: pasaron en grupos de séptimo grado a proponer... uno dijo “escribamos los números, ya está muchachos”, otro dijo que no, que busquemos una cuestión económica: cortamos en millones, y quedé en la palabra millones, porque estaba en el libro también. ¿Y qué pasó? Ahí pasó que por ejemplo 124 millones, y había otro que era un billón, o 1.000 millones, pero se comían esos tres ceros, y ponían como que era un millón. ¿Se entiende?

Héctor: más o menos, a ver.

Sebastián: tachaban nueve ceros en vez de seis, porque decían “me queda uno acá”. La concesión fue “tachemos los ceros”.

Héctor: tachaban el mil millones.

Sebastián: pero eran seis ceros que había que tachar... pero ellos tachaban nueve.

Ponele que un planeta estaba a 124 millones, y otro estaba a 1.000 millones. Como la concesión era tachar los seis ceros, dijeron “pará, acá hay nada más que ceros, entonces tachamos los nueve ceros, y al de arriba le tachamos seis”.

Mirta: tacharon todos los ceros, claro.

Sebastián: a mí eso me alertó, porque dije “escuchame, no es lo mismo tachar seis ceros que tachar nueve”.

Héctor: y pero si el cero no vale nada, ¿cómo no lo voy a tachar?

Sebastián: “El cero no vale nada”, eso me dijeron. (...) Les dije “Pero pará, traten de hacer la misma discusión con la plata. ¿Es lo mismo si tu mamá te da \$100 que si te da \$1.000?”. “No”, “Y hay un cero, ahí estás tachando un cero, no tres” (...). Pero los chicos ahí agarraron como... “claro, nosotros ahí tachamos nueve ceros y acá tachamos seis”. Y les dije: “si vas a igualar, igualás”, y ahí fue que cayeron, recién cuando los puse con la plata... porque antes, con los planetas era “bueno, tachamos ceros, tachamos seis, tachamos tres...”.

Mirta: el ejemplo del dinero para ellos es infalible, porque es lo que manejan.

En el devenir de la reunión, la intervención inicial de Mirta va virando hacia diferentes aspectos involucrados en el trabajo con los números grandes con coma. En un primer momento manifiesta también aquí su preocupación respecto de la escritura, el uso de

puntos y comas, las interpretaciones que hacen sus alumnos sobre ellos. Trae cuestiones vinculadas a la estructura del número, a aspectos más figurativos, como el punto, que tiene una función para facilitar la lectura pero que no afecta la interpretación en términos de denominación.

En un momento posterior del intercambio, los números son estudiados como un recurso para establecer comparaciones al tener que decidir cuál planeta está más cerca o más lejos del Sol a partir de la información de distancias ya provista en una tabla. Una vez más, la tarea se ubica en el contexto de la medida.

Finalmente, lo nuevo que introduce Sebastián es la idea de operar con números grandes. Los niños construyen una regla, la de “tachar ceros”, buscan una regla de acción práctica que actúa como justificación: “porque no valen nada”. No piensan tanto en el número, en la cantidad que representa, en su estructura o en las operaciones involucradas. ¿Por qué no se podría tachar en un número seis ceros y en otro nueve ceros? Frente a esto Sebastián decide intervenir trayendo a la discusión nuevamente un contexto familiar y cargado de una significación particular como es el dinero: “¿Es lo mismo si tu mamá te da \$ 100 que si te da \$ 1.000?”.

El problema original —en el contexto de la Astronomía— presenta una situación que encierra cierta complejidad para poder ser representada por los alumnos, ya sea por la información que provee, como por las magnitudes de los números que intervienen. Y esto dificulta la posibilidad de ejercer un control sobre las cantidades (distancias en este caso) que están involucradas. Es por ese motivo que creemos que Sebastián no solo decide cambiar esa situación inicial a un nuevo contexto que sea más accesible para los niños sino que además, reduce las magnitudes de los números en juego tornándolos más manejables porque pasan de ser miles de millones a miles.

En esta ocasión los docentes apelan al contexto cuando identifican que sus alumnos enfrentan algunas dificultades. Este recurso, que es compartido en ambas escenas, tiene algunas diferencias en uno y otro caso. Por ejemplo, en la Escena 1, Mirta apela al uso del diario y Sebastián al de twitter para dar un significado al trabajo con números grandes. En la Escena 2, el contexto del dinero aporta no solo un marco diferente que es más familiar, sino una posible herramienta de control. Los maestros parecen disponer de una variedad de matices de usos y funciones del contexto, que se distingue al conocer las decisiones que toman para la enseñanza en el espacio de trabajo compartido. Este es también un sentido de la construcción de la colaboración, vinculado a la riqueza de propósitos de una intervención de los docentes que supera ampliamente la discusión dicotómica sobre el uso o la exclusión del contexto. Retomaremos estas ideas en la sección final de este artículo.

Escena 3: el punto coincide con la coma

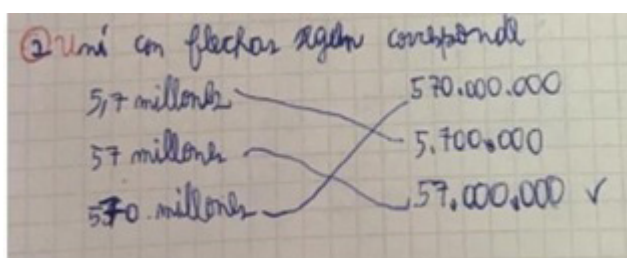
La inclusión de esta última escena tiene el propósito de señalar que, en el marco del diálogo colaborativo entre docentes e investigadores, algunas actividades que se despliegan en el aula pueden ofrecer nuevos sentidos para los maestros. Al tratarla en el espacio colaborativo, es posible poner en evidencia que la actividad no está definida por el enunciado que la presenta, sino que requiere también la consideración de la intencionalidad con la que se plantea y las interacciones que se generan a partir de ella. En este caso, una propuesta escolar usual de unir escrituras equivalentes con flechas da lugar al análisis de una regla que los alumnos elaboran a propósito de la resolución.

En el marco del trabajo con el sistema de numeración al iniciar el año escolar, Sebastián propone una situación en su aula de sexto grado,¹² y detecta algo que le llama la atención. Cuando la actividad finaliza y los alumnos abandonan el salón, este maestro recoge algunas hojas de carpeta con producciones y toma notas de lo que sucedió en el pizarrón durante un diálogo con toda la clase.

Nos acercamos a esa escena a partir de dos registros complementarios. El primero de ellos es un correo que envía a los investigadores anticipándose al encuentro siguiente; el segundo, es el relato que realiza durante la reunión misma. La transcripción de algunos fragmentos de esa conversación forma parte de este texto.

Un correo que anticipa un hallazgo

El contenido del correo es el relato breve de una actividad que consistió en unir con flechas dos expresiones distintas de un mismo número. El correo incluía también fotos de algunas producciones, como la que puede verse a continuación:



¿Qué había ocurrido en esa actividad que merecía ser anticipado? ¿Cuál es el hallazgo que justifica acercar una escena del aula por correo antes de la reunión siguiente?

Sebastián explica en su mensaje, y luego amplía en el encuentro, que el ejercicio de unir con flechas había sido resuelto de manera correcta por casi todos sus alumnos. Y que, al preguntarles cómo se habían dado cuenta de que 5,7 millones equivalía a 5.700.000, la respuesta de todo el grupo fue que “el punto coincide con la coma”. Con la intención de poner en duda esa regla espontánea elaborada por los alumnos, Sebastián repreguntó qué pasaría si quisiera escribirse el número 5.700.000.000 usando números y la palabra millones. Su texto primero y el relato después detallan la intensa discusión que este interrogante generó en toda la clase. El siguiente fragmento con el que cierra su correo, da idea de la complejidad a la que se asomaron alumnos y maestro en ese momento.

(...) Después de un rato y de diferentes discusiones entre ellos y ellas llegaron a una especie de conclusión que era “que los decimales sirven, como las fracciones, para cuando necesito nombrar a una parte de algo” pero no pudimos llegar a pensar que en este caso ese “algo” o “entero” serían los millones.

Me parece que ahí, entender que los millones pueden ser en sí una unidad tiene un grado de dificultad. El otro día hablábamos de los decimales¹³ y el contexto que usamos para estudiarlos. A la tarde de ese mismo día me pasó esta situación.

¹² En el turno mañana, Sebastián era maestro de cuarto grado en la escuela en la que se desarrolló la indagación objeto de este texto. Y, en el turno tarde, era maestro de sexto grado de otra escuela del distrito. La situación y producciones que se presentan en este apartado corresponden a sus alumnos del turno tarde.

¹³ Se refiere a la reunión previa entre docentes e investigadores.

Antes de analizar en detalle la reunión donde se discute sobre esta escena y examinar los materiales, subrayemos el hecho de que hay un mensaje anticipado, tal vez debido a la sorpresa del hallazgo o al entusiasmo que genera encontrar algo que es evaluado como interesante para aportar al espacio.

En efecto, Sebastián recorta una escena del aula que tiene relación con el tema que se está tratando: la posibilidad de trabajar en la clase con los miles y los millones como unidades y abordar escrituras que combinen una notación numérica (entera o decimal) y la expresión en palabras de la unidad utilizada. Por ejemplo, 5,7 millones.

Tal vez, otra causa de la anticipación por correo pueda tener que ver con el entusiasmo que le produjo la sospecha de haber encontrado una “perla” en el aula: los alumnos resuelven de manera correcta, pero ante su demanda de explicaciones aparece algo inesperado. Las respuestas que los niños plantean a sus preguntas dan cuenta de que al tener que justificar su accionar, hacen explícita una regla según la cual la coma que separa la parte entera de la decimal, coincide con el punto. No sabemos cuán presente estuvo esa regla en el momento de la resolución, pero el hecho de que la propongan como justificación merece que sea tratada y discutida ya que permite adentrarse en una relación sustantiva del trabajo matemático, la que liga los procedimientos con sus justificaciones.

En síntesis, es posible que la premura de la comunicación se deba a que Sebastián encuentra en el aula una cuestión novedosa que convoca su intervención como docente y eso lo entusiasma.

Ese “hallazgo” en el espacio de trabajo compartido

Ya en la reunión, la conversación comienza por la reconstrucción de la escena y por el relato más detallado del diálogo entre maestro y alumnos.

Sebastián: bueno, de hecho fue uno de los ejercicios que todo el mundo resolvió bien. Ahora ¿qué pasa? Les pregunté: “¿hubo alguna duda?”. “No”, dijeron. Y les dije: “en este de la coma, ¿cómo se dieron cuenta?, en el cinco coma siete millones”.

Y ahí me dijeron: “el punto coincide con la coma” y dije: “guau¹⁴ es esto”. Y ahí me acordé de cuando decían [los investigadores] hay que registrar ese tipo de cosas. Entonces me puse atento, medio a escuchar para después registrar. Y cuando dijeron [los alumnos] “el punto coincide con la coma” les puse otro ejemplo que era cinco mil setecientos millones.

Héctor: claro porque tiene tres ceros más.

Sebastián: porque claro, ¿qué pasa? Con cincuenta y siete millones, se lee cincuenta y siete millones. Para quinientos setenta millones [se refiere al otro número de la producción] no había mucha duda. Ahora cuando él me dijo “el punto coincide con la coma”, les puse cinco mil setecientos millones.

Un primer aspecto a analizar de este episodio es el tipo de tarea que deben realizar los niños. Se trata de una actividad en la que deben leer e interpretar distintas escrituras de “números grandes”. Algunas de ellas utilizando expresiones numéricas con coma y la palabra millones, y otras expresadas según las reglas de escritura de los números naturales. Si se consideran los números elegidos, puede señalarse que para 57 millones

¹⁴ Expresión que se pronuncia ante una sorpresa o algo que es poco común.

y para 570 millones, es posible identificar a qué número corresponde cada una de estas expresiones manteniendo las cifras y reemplazando la palabra millones por los seis ceros. Sin embargo, en 5.700 millones, ya no puede mantenerse esta “regla” que los alumnos parecen seguir y sobre la que más adelante volveremos.

Como señala Sebastián, el problema no es la resolución de la actividad que, de hecho, *fue uno de los ejercicios que todo el mundo resolvió bien*, sino que lo problemático de la situación para los niños fue sostener la validez de la regla ante el nuevo número propuesto. La pregunta de este maestro resulta clave entonces, porque provocó la explicación de una idea que de otro modo no hubiera podido discutirse en clase y tampoco hubiera sido motivo de reflexión en la reunión entre docentes e investigadores.

Detengámonos en la pregunta ¿qué le da origen? ¿Por qué este maestro consulta por ese número en particular? Una cuestión llamativa es que esta pregunta no parte de una resolución errónea de los alumnos o de la percepción de que ha habido alguna dificultad específica. La demanda nace de una respuesta acertada y apunta a la comprensión. Este maestro no parece conformarse con que sus alumnos hayan resuelto correctamente. ¿*Cómo se dieron cuenta?* puede entenderse como un pedido de explicación, una solicitud de argumentos, y es en los argumentos donde se hacen explícitas las relaciones. Este maestro parece tener presente esta cuestión.

Posiblemente la pregunta por 5,7 millones se deba a que Sebastián anticipa que en ese número pueda haber algo para analizar. Y la respuesta —el punto coincide con la coma— es un hallazgo que permite reflexionar sobre varios asuntos. Uno de ellos —que ya mencionamos— es el hecho de que los niños elaboran reglas de acción al enfrentarse a la resolución de una actividad. Reglas que en muchos casos son puestas en acto y permanecen implícitas o, aun cuando los alumnos tienen conciencia de ellas, resultan inaccesibles para los docentes porque pueden generar —como en este episodio— respuestas correctas. En esta oportunidad, se apoyan en una regla que se centra en aspectos de la escritura sin interrogarse por la estructura del número, es decir, por las operaciones involucradas en su constitución. El mecanismo de control consiste en verificar la cantidad de cifras y es precisamente ese mecanismo y no la organización del número, lo que es generalizado.

Desde la perspectiva de los alumnos, pareciera que el punto y la coma tienen el mismo estatus. Sin embargo, se hace visible la necesidad de discutir con ellos que punto y coma se diferencian. En efecto, el punto solo cumple una función de ordenar la lectura y su anotación puede omitirse. En cambio, quitar la coma o modificar su ubicación cambia el número en cuestión.¹⁵

Otro aspecto sobre el que es posible reflexionar es el hecho de que este maestro comprende cuál es la lógica de construcción de la respuesta por parte de sus alumnos. Comprender qué sentido le atribuyen los niños a la idea de que el punto coincida con la coma le permite entrar en diálogo con ellos y con esa idea y, por lo tanto, proponer una situación que plantee una contradicción. Su intervención no es señalar que la regla se cumple solo en algunos casos, es decir que tiene cierto campo de validez, sino que propone un número tal (cinco mil setecientos millones) que al dividirlo por un millón, queda expresado como 5.700 millones. Se trata de una escritura que tiene más puntos en posiciones que remiten al millón y, por lo tanto, permite poner en cuestión la regla que sus alumnos están esgrimiendo.

¹⁵ Nos estamos refiriendo al uso del punto y la coma tal como se emplea en la Argentina y en muchos otros países. En otras regiones —por ejemplo EE.UU.— se consideran, a la inversa, las comas como marcas de valor de posición en los números enteros y los puntos como inscripciones que señalan la separación entre la parte entera y la decimal. Más allá del uso específico en cada caso, la distinción entre ambas marcas gráficas tiene el mismo sentido.

La pregunta *¿cómo se dieron cuenta?* da lugar al diálogo y este a la repregunta, que es en realidad un contraejemplo. Este juego de intervenciones, que toma forma de controversia ocasionada por el maestro, es ejemplo de una característica específica del trabajo docente. En efecto, lo específico no es solo el hecho de plantear un argumento o de proponer un caso que ponga en jaque la regla utilizada por los alumnos. Lo específico es también anterior al momento de esa intervención y tiene que ver con la posibilidad de interpretar lo que sus alumnos están pensando y que los lleva a sus resoluciones. En este caso, es posible que Sebastián, al querer hacer explícitas las relaciones que se habían puesto en juego, “se encontrará” con la regla, que fue lo que lo sorprendió y en ese contexto pudiera “leer” con cierta rapidez algunas señales de la situación a partir de interpretar la lógica subyacente en las producciones y, además, pensar *in situ* una alternativa que las cuestione apoyándose en esa misma lógica.

Si analizamos la intervención de Sebastián con detenimiento, veremos que en ningún momento explicita que las razones de la regla implican una sobregeneralización, sino que opta por plantear un caso que resulta problemático, en el que queda a cargo de los alumnos interpretar la contradicción entre sostener que “el punto coincide con la coma” y el hecho de que para 5.700.000.000 no es necesario utilizar la coma si la unidad a la que se apela es el millón.

Es decir, hay un plano implícito, que es posible asociar a la capacidad interpretativa de este docente, y que está dado por el hecho de que no comunica a sus alumnos que ha interpretado qué es lo que no funciona con la regla que elaboraron, tampoco les comunica de manera directa la solución, ni sus intenciones al proponer el nuevo número que les plantea. Este doble esfuerzo de interpretar los sentidos en juego y de apelar a que sea el problema a resolver el que ponga en cuestión los conocimientos que se están elaborando en la clase es también un rasgo característico de la escena que protagonizan este maestro y sus alumnos. El relato de Sebastián sobre la escena continúa:

Sebastián: quinientos setenta millones [se refiere al otro número de la producción]. No había mucha duda. Ahora cuando él me dijo “el punto coincide con la coma”, les puse cinco mil setecientos millones. ¿Y qué pasó? Ahí se les hizo un matete bárbaro porque el punto tenía que coincidir con la coma y la palabra millones. Entonces empezaron a poner cinco coma setenta, otro dijo que cinco coma setecientos, y después alguno se empezó a dar cuenta de que “no”, pará, 5,70; 5,700 y 5,7 es lo mismo. ¿Pero cómo escribimos esto? O sea, hubo como veinte minutos hasta que uno llegó a decir cinco mil setecientos millones.

Si profundizamos en la intervención que plantea, es posible identificar que el contraejemplo es también una modificación de la tarea. “Les puse cinco mil setecientos millones” significa que ahora el número está en cifras y los alumnos deben buscar una manera de expresarlo apelando a una escritura en la que, como en los casos anteriores, la unidad sea el millón.

La modificación que hace Sebastián al proponer un nuevo caso, coloca a sus alumnos en un dilema. ¿Cuál punto de los que pueden incluirse en 5.700.000.000 es el que debe coincidir con la coma? En este caso, como la unidad es el millón, no es necesaria ninguna coma en la escritura (que puede expresarse como 5.700 millones).

Nuevamente, el razonamiento que están desplegando sus alumnos ante el nuevo número es interpretado en el acto por el maestro y esta interpretación —junto con el relato del episodio— será motivo de trabajo entre docentes e investigadores. El siguiente es un fragmento del diálogo entre Sebastián y Mirta en el marco del espacio compartido.

Sebastián: ellos habían generalizado que el punto se condice con la coma, acá [señala la producción].

Mirta: cuando les apareció más de un punto no supieron cuál rechazar.

Sebastián: claro. Les dije “¿de dónde salía esa coma? Porque la coma es el punto”. Perfecto dije yo. Listo, cuando les agregué más cifras, ellos ya habían pensado en esa generalización. Imaginate que empezaron a poner en duda, empezaron a agregar ceros a los decimales ¿Entendés? y después cuando alguno veía el pizarrón decía: “No chicos, 5,70 y 5,700 es lo mismo ¿qué estamos haciendo?”. Hablaban entre ellos y yo me corrí...

Mirta: los dejaste discutir.

Ambos docentes comparten el sentido que le otorgan a la escena y Sebastián no solo dimensiona el nivel de dificultad que enfrentaron sus alumnos al relatar una reacción que le resulta sorprendente para ese nivel de la escolaridad, sino que también menciona qué intervención llevó adelante. En este caso, decidió dejar que fueran sus alumnos los que calibraran sus respuestas en una escena pública en la que todo sucedía en el pizarrón.

Sebastián subraya el hecho de que se corrió. Es decir que el diálogo a propósito de la escritura numérica comenzó a circular en la clase sin necesidad de una intervención del docente que estimulara el debate. Así, es posible pensar que para estos alumnos haya representado una pregunta genuina y ese sea para este maestro, un sentido más por el que evalúa como interesante el episodio para aportarlo al espacio de trabajo.

Tomemos ahora el encuentro en el espacio compartido entre docentes e investigadores. ¿Qué es lo que este maestro trae a esa reunión? ¿Por qué selecciona este episodio para compartir? ¿Qué ocurre en el encuentro entre docentes e investigadores al analizar esta escena? ¿Qué relaciones establece entre el espacio de trabajo y la clase?

Creemos que Sebastián recoge de su clase un fragmento que considera —como veremos en sus dichos— vinculado a las ideas compartidas en las primeras reuniones entre investigadores y docentes. Esto es, al aumentar el rango numérico, los alumnos enfrentan nuevas preguntas que no pueden plantearse al trabajar con un rango menor. En este caso se trata del rol de los puntos en la escritura.

La actividad está incluida en el plan de clases que tiene previsto para el mes de abril con sistema de numeración. Se trata de una tarea tomada del libro de texto con el que trabajan sus alumnos. La propuesta de utilizar el millón como unidad es similar a una que se sugiere en un material curricular¹⁶ que los investigadores acercaron a los docentes en el encuentro anterior, pero que no es analizado en la reunión y queda a disposición de los maestros.

Sebastián: (...) Les compartí la actividad porque me pareció que graficaba lo que veníamos charlando: esto de cuáles son los problemas que se pueden dar, o cuáles son las situaciones donde los chicos se confunden y parecía como mandado a propósito porque fue justo a los pocos días de la reunión.

¹⁶ Se trata de un material destinado a docentes en el marco del Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad en el nivel primario de la ciudad de Buenos Aires. Las actividades planteadas en esa publicación contienen un análisis didáctico y orientaciones para la enseñanza dirigidas al docente. Las que en este caso se ofrecieron corresponden a las incluidas en el tomo I de 6°/7° grado.

En el párrafo anterior Sebastián se pregunta —como en el caso de las escenas de twitter o del proyecto de Astronomía— cuáles son los problemas que permiten poner en relación las informaciones iniciales que los investigadores aportan con sus propias intenciones didácticas (qué problemas dar, por qué, con qué propósitos). Su expresión, “cuáles son las situaciones que se pueden dar” puede entenderse como aquellas en las que es posible articular una pregunta sobre el contenido de enseñanza que se va elaborando al calor de los encuentros entre docentes e investigadores, con una gestión de clase que sostiene a sus alumnos en la actividad. Interpretamos que desde su perspectiva esta escena cumple ambos requisitos.

El hecho de que traiga este relato al espacio de trabajo da indicios de cierta circulación entre lo que sucede en los encuentros y lo que es observable en el aula. Las reuniones aportan una forma de posicionarse en la clase y, a la vez, la vida en las aulas nutre las reflexiones en el espacio compartido. Por ejemplo, es importante estar atento y tener algún tipo de registro para poder discutir luego sobre lo que pasa en la clase, las ideas de los niños forman parte del sentido que los conocimientos tienen en el aula, los alumnos encuentran algunas dificultades que resultan impactantes, todas ellas son ideas que se mencionaron en el espacio de trabajo y que los maestros tuvieron presentes en sus clases. Los diversos fragmentos del relato de Sebastián son un buen ejemplo de ello. A la vez, hay una mirada frente al acontecer del aula que actúa como interrogante para el intercambio entre docentes e investigadores.

En este último sentido, es interesante señalar que en esta doble circulación fueron los maestros, a lo largo de la investigación, quienes seleccionaron y plantearon situaciones que les resultaban interesantes, incómodas o interpeladoras. En todos los casos se trató de escenas que convocaban a la interpretación compartida. Y, en esta escena en particular, es clara la posición investigativa que adopta este maestro al hacer referencia al interés de registrar lo sucedido en el aula.

A modo de cierre

A lo largo de este texto hemos comunicado algunos aspectos referidos a la construcción de la colaboración entre docentes e investigadores que se han reunido sistemáticamente para analizar problemas relativos a la enseñanza de las escrituras numéricas en el segundo ciclo de la escuela primaria. De todo el recorrido transitado, hemos seleccionado algunas conversaciones que dan cuenta de un trabajo compartido, estructurado alrededor del análisis crítico de diversas opciones didácticas.

Los intercambios realizados se enfocaron en: el estudio de las actividades propuestas a los alumnos, las interacciones en las clases a raíz de dichas actividades, la comparación entre diferentes desarrollos posibles para el tratamiento de los contenidos en cuestión y la interpretación de producciones de los niños. Estos aspectos se fueron relacionando unos con otros, haciendo visible para todos la fertilidad de la discusión para comprender mejor la complejidad de la enseñanza.

El análisis compartido de los resultados de una investigación sobre escrituras numéricas infantiles que los investigadores habíamos aportado al iniciar el trabajo volvió la mirada de los maestros hacia el tratamiento que venían haciendo en sus aulas sobre los números grandes en el contexto de la medida. Más específicamente, parecían preguntarse si las ideas de los niños sobre números grandes que habíamos presentado tenían algún lugar en sus propuestas. Destacamos el papel de referencia que tuvo la investigación mencionada, no para pensar en reproducirla de alguna manera en las clases sino para poner de relieve algunas propiedades relativas a la organización del

sistema de numeración cuya explicitación no siempre está presente en la enseñanza. Este retorno reflexivo sobre sus propias opciones didácticas desencadenó un proceso colectivo de análisis que se sostuvo a lo largo de la vida del espacio colaborativo.

Los maestros priorizan el trabajo con escrituras en las que opera un cambio de unidad respecto de las notaciones convencionales y proponen situaciones en las que se emplea el mil, el millón, etc. como unidades. De esta manera, logran referirse a cantidades grandes sin utilizar todos los lugares posicionales que requeriría la escritura usual. El contenido “números grandes” que plantea el Diseño Curricular es resuelto entonces por los docentes apelando a expresiones que comportan un número con pocas cifras y una unidad de medida. Al entrar en contacto con nuestros resultados y avanzar en las discusiones, se hacen explícitas las complejidades relativas a las expresiones con muchos dígitos sobre todo de aquellas que tienen ceros intermedios, cuestión que no aparece al acortar la escritura.

Al compartir y comparar el trabajo producido en las distintas clases se enriquecen las relaciones implicadas en la enseñanza del contenido en juego. Este es un aspecto constitutivo de la colaboración. Por ejemplo, la posibilidad de analizar simultáneamente las actividades que refieren a escrituras con diferentes unidades con aquellas en las que se utiliza una misma unidad —opciones de dos maestros diferentes— da lugar a relaciones que no podrían establecerse si las dos situaciones se trataran por separado.

El análisis compartido de las producciones infantiles, tanto las que aportaron los investigadores para dar inicio al proyecto, como las que acercaron los docentes, tuvo una consecuencia ya detectada en otras indagaciones de tipo colaborativo cercanas a este equipo. En efecto, el material que los niños elaboran y la tarea de darse a interpretarlos, constituye un terreno común entre investigadores y docentes y representa una puerta de acceso a la problematización del conocimiento en juego. Al revisar críticamente la relación entre investigación y enseñanza, Sadovsky *et al.* (2016) señalan que la interpretación compartida de las producciones infantiles permite desentrañar el conocimiento matemático de los niños, lo que amplía en los docentes sus posibilidades de intervención y, al mismo tiempo, permite también reconceptualizar el objeto de enseñanza.

El transcurrir de los encuentros permitió tanto a los docentes como a los investigadores establecer relaciones entre el sistema de numeración, las formas de escritura en las que se utilizan números con coma con unidades como los miles o los millones, y expresiones usuales del sistema métrico. Estas relaciones no estaban presentes en el inicio de las reuniones, son producto del trabajo compartido.

Es en este proceso de elaboración de nuevas relaciones que se llevan adelante y se resignifican algunas escenas del aula. Así, lejos de ser un producto acabado, los números grandes constituyen un objeto cuya interpretación y funcionamiento son revisados en el equipo a partir de las preguntas que surgen. Efectivamente, comprender el significado de la unidad de medida expresada en una escritura numérica, analizar el alcance y la justificación de una regla para tachar los ceros de una notación o discutir las razones de una formulación como que el punto coincide con la coma, son situaciones que hacen foco en las dificultades y sentidos que los alumnos atribuyen a las escrituras numéricas en el contexto de la medida. Las voces de los docentes aquí reproducidas manifiestan discusiones novedosas en las clases sobre este tema.

El interés compartido de los maestros sobre las producciones da cuenta de una postura en común: lo que piensan los alumnos es importante para la enseñanza o necesita ser conocido por ellos. En ese sentido, las tres escenas representan buenos ejemplos de cómo las ideas de los niños son constitutivas de los conocimientos en juego (Sadovsky *et al.*, 2016).

En los fragmentos presentados es posible identificar que los maestros incluyen las ideas infantiles como uno de los elementos a tener en cuenta para tomar decisiones sobre el avance de la clase. Así, las dificultades que presentan los alumnos, su comprensión frente a los nuevos conocimientos son interpretadas en el espacio de trabajo en términos de complejidad del objeto de enseñanza y, en ese sentido, esas dificultades se asumen como problemas propios que enfrentan los docentes en su tarea. Las respuestas erróneas, las reglas en acto parcialmente válidas que se producen en el aula los llevan a preguntarse por qué no entienden y es, a partir de ellas, que toman decisiones y orientan la búsqueda de nuevas intervenciones reconfigurando su tarea. Las ideas de los niños no solo son consideradas para comprender la lógica que sostiene las producciones sino también para entrar en un diálogo que permita cuestionarlas.

El intercambio entre docentes e investigadores también permitió establecer vínculos entre las escrituras referidas al sistema métrico y aquellas en las que se utiliza el mil o el millón como unidad. Es decir, dio la posibilidad de pensar qué relaciones hay, por ejemplo, entre 5,4 km y 5,4 miles.

Finalmente, un hecho que resulta notorio y que ya ha sido señalado, es la apelación al contexto con intencionalidades diversas por parte de los maestros: para dar cierto sentido a una situación, para proponer alguna que resulte familiar y así facilitar la comprensión, para ofrecer un contraejemplo, o para que los alumnos tengan modos de controlar sus propios resultados, son los propósitos que pueden identificarse en las escenas planteadas. Incluso en una misma situación se apela a un contexto como el de la Astronomía para ofrecer un ámbito de aplicación de números grandes, pero al registrar que brinda pocos elementos para controlar la producción de respuestas se decide apelar al dinero para que los alumnos verifiquen ciertas operaciones realizadas. Esta manera de hacer matemática en el aula nos remite al señalamiento de Bednarz y Prouxl (2017) quienes, al considerar a los docentes como profesionales que utilizan la matemática en su lugar de trabajo, advierten cómo en el uso de esta disciplina se ajustan a las demandas de la actividad laboral, vinculadas a la enseñanza en determinado nivel, y a las decisiones que son consecuencias de restricciones específicas, como por ejemplo, las posibilidades de comprensión de los alumnos. En otros términos, la matemática en el aula no es un objeto cristalizado y único, los maestros parecen encontrar maneras particulares de hacer que se ajustan al diálogo con sus alumnos.

En este texto hemos presentado tres escenas de un proyecto de trabajo con docentes de una escuela primaria. Nos hemos preguntado por las condiciones de implementación de un tema de enseñanza a partir de los resultados de una indagación sobre el sistema de numeración en el segundo ciclo. El carácter colaborativo de los encuentros con los docentes nos permite comprender mejor en qué sentidos la colaboración es a la vez marco de trabajo y resultado de la tarea.

Agradecimientos

Queremos agradecer especialmente a la Dra. Patricia Sadovsky por el acompañamiento en el análisis de los datos obtenidos y la producción de este texto.

Bibliografía

- » Bednarz, N. (2015). Entrevista realizada por Jean-Luc Rinaudo y Eric Roditi. *Carrefours de l'Education* 2015/1, N° 39: 171-184.
- » Bednarz, N. y Proulx, J. (2017). Teachers' mathematics as mathematics-at-work. *Research in Mathematics Education*, 19:1: 42-65.
- » Bronckart, J. P. (2010). ¿Por qué y cómo analizar el trabajo docente? En *Desarrollo del lenguaje y didáctica de las lenguas*. Buenos Aires, Miño y Dávila.
- » Castorina, J. A. (2008). Problemas epistemológicos de la psicología del aprendizaje. Conferencia dictada en la ciudad de Mar del Plata. Dirección General de Cultura y Educación. Encuentro provincial de inspectores areales, 21 y 22 de febrero.
- » Castorina, J. A. y Sadovsky, P. (2018). Los saberes docentes y la producción de conocimiento sobre la enseñanza. *Desde la Patagonia. Difundiendo saberes*, 15 (26): 8 -12.
- » Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaría de Educación (2004). Programa de reorganización de las trayectorias escolares de los alumnos con sobreedad en el nivel primario de la ciudad de Buenos Aires. Proyecto de conformación de Grados de Aceleración 6º y 7º grado. Tomo I. Matemática.
- » Ponce, H. (2020). El aprendizaje del sistema de numeración en el segundo ciclo de la escuela primaria. Viejos y nuevos problemas al aumentar el rango numérico. En D'Ambrosio, S. (comp.). *Saberes y haceres en la formación y práctica docente*, pp. 301-317. Buenos Aires, Editorial ENS 4 Voces publicadas / Bajolauna.
- » Proyecto UBACyT 200220130100491BA. El aprendizaje del sistema de numeración en secciones múltiples rurales de 1er ciclo y en aulas urbanas de 2do ciclo. Directora: Flavia Terigi. Codirectora: Susana Wolman. Programación 2014-2017.
- » Sadovsky, P.; Quaranta, M. E.; Itzcovich, H.; Becerril, M. M. y García, P. (2015). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. *Educación matemática*, 27(1): 7-36.
- » Sadovsky, P.; Itzcovich, H.; Quaranta, M. E.; Becerril, M. M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación matemática*, 28(3): 9-30.
- » Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir*. Bruselas, De Broeck.

Héctor Ponce

Doctorando en Educación, Universidad de Buenos Aires. Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática, Universidad de San Martín. Licenciado en Ciencias de la Educación, Universidad de Buenos Aires. Profesor adjunto regular Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).
hectorponce2006@gmail.com

Graciela Zilberman

Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática, Universidad de San Martín. Licenciada en Psicopedagogía, Universidad CAECE. Profesora adjunta regular Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE).
grazilberman@gmail.com

